Cañibano, Aleandro y D´Andrea. 2023. Modelización de la temperatura mediante la función Coseno. Revista Sigma, 19 (1). Páginas 10–23.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XIX № 1 (2023), páginas 10–23

Modelización de la temperatura mediante la función Coseno

Cañibano Alejandra [1]

Aleandro María José [2]

D´Andrea Rodolfo [3]

Abstract: Based on an experimental problem from Agrometeorology, it encourages the student of agronomic sciences to discover this function through one of its applications. The invention is intended to approximate the Cosine trigonometric function and its graph in a natural way by observing the behaviour of a particular phenomenon, modelling the temperature through said function. The activity seeks that students get involved in a project, incorporate knowledge in an integrated way and can establish relationships between areas and concepts that in principle do not seem to be associated. The work can be framed under the STEM educational model because it proposes an activity that involves the development of certain skills.

Keywords. Cosine function – Modeling – Temperature – STEM model.

Resumen: A partir de un problema experimental proveniente de la Agrometeorología, promueve que el estudiante de ciencias agronómicas descubra esta función a través de una de sus aplicaciones. Se busca que se aproxime a la función trigonométrica Coseno y a su gráfico de manera natural observando el comportamiento de un fenómeno concreto, modelizando la temperatura a través de dicha función. La actividad busca que los alumnos se involucren en un proyecto, incorporen los conocimientos de manera integrada y puedan establecer relaciones entre áreas y conceptos que no parecen estar asociados. El trabajo puede enmarcarse bajo el modelo educativo STEM pues propone una actividad que involucra el desarrollo de ciertas habilidades.

Palabras Clave. Función Coseno – Modelización - Temperatura – Modelo STEM.

[1] Docente de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Área Matemática. Correo: mac@faa.unicen.edu.ar

[2] Docente de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN). Área Matemática. Correo: mjaleandro@azul.faa.unicen.edu.ar

[3] Docente de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN) y de la Pontificia Universidad Católica Argentina (PUCA). Área Matemática. Correo: rodolfoedandrea@gmail.com

1. Introducción

Durante la práctica docente es indispensable propiciar el desarrollo y potencialización de competencias en los estudiantes. Por esta razón es necesario diseñar estrategias que faciliten el fortalecimiento de los diferentes procesos y tipos de pensamiento matemático: numérico, geométrico, métrico, aleatorio. También es importante el desarrollo del pensamiento variacional el cual, debido a sus particularidades, es complejo pero sustancial. Las tareas que fomentan este tipo de pensamiento ofrecen muchas oportunidades para la aplicación de los restantes tipos de pensamiento.

Van Hiele (1957) [10]puntualiza que una de las dificultades en la enseñanza de la trigonometría es el abuso de las fórmulas. Este inconveniente se debe a una enseñanza de la trigonometría caracterizada por un enfoque algebraico donde se manipulan símbolos, operaciones y propiedades abstractas que no ayuda a la comprensión de los conceptos y propiedades, a conectar unos y otras, ni a establecer relaciones entre las diferentes representaciones.

Algunas investigaciones ponen en evidencia las dificultades que los estudiantes tienen frente a la comprensión de las razones y las funciones trigonométricas, sus propiedades, usos y diferencias. Montiel et al. (2012) [5] señalan que los estudiantes no logran una cabal diferenciación del seno y el coseno como razón y como función trigonométrica. Weber (2005) [12] con el objetivo de examinar la comprensión acerca de las funciones trigonométricas, seleccionó dos grupos para un estudio, concluyendo que a través del uso de la tecnología computacional los estudiantes fueron capaces de calcular los valores de las expresiones trigonométricas dadas y dedujeron sus propiedades, justificando paso a paso las características que las describen. Tavera y Villa Ochoa (2013) [8] cuando analizaron la manera en que los libros de texto promueven el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas, observaron que algunos textos universitarios denominan como funciones trigonométricas a aquellas expresiones que sirven para calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, las cuales están determinadas por un ángulo agudo.

Villa Ochoa y Ruiz (2010) [11], sostienen que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar puesto que cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas, cuyos escenarios se hallan referidos a fenómenos de cambio y variación, provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Por tal razón, se considera que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Según Caballero Soler (2013) [1], los problemas contextualizados son útiles para incentivar el desarrollo del pensamiento científico de los estudiantes al fomentar mediante una intervención didáctica la utilización del método científico, potenciando el uso de diferentes sistemas de representación: imágenes, gráficos, símbolos y material concreto. De esta manera es posible acercarse al concepto matemático puesto en juego.

Entre las dificultades que se detectan, en relación al proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, se destaca el conflicto que se le presenta al estudiante en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas. Esta dificultad está relacionada con el problema del paso de lo discreto a lo continuo y quizás a la falta de contextualización significativa que tienen las funciones trigonométricas. En general en procesos de enseñanza aprendizaje de la Matemática los conceptos están relacionados únicamente con las definiciones y los algoritmos seguidos para sus cálculos dejando de lado la amplia e importante aplicabilidad de los mismos, llevando a un proceso puramente mecánico que fácilmente puede ser olvidado.

En este trabajo se presenta una propuesta que pretende ofrecer una opción de trabajo diferente a la habitual. El objetivo de la actividad es lograr un aprendizaje significativo de las funciones trigonométricas. Para ello se utiliza como herramienta un problema que permite analizar un fenómeno periódico que se manifiesta en el mundo real. Se busca que el estudiante se aproxime a la función trigonométrica *Coseno* y a su gráfico de manera natural, observando el comportamiento de un fenómeno concreto: modelizar la temperatura a través de la función coseno.

El trabajo representa una actividad para alumnos de la carrera de Ingeniería Agronómica (UNICEN); en la asignatura Agrometereología se estudia, a grandes rasgos, la temperatura cercana al suelo integrando aspectos biológicos y estableciendo relaciones en el sistema suelo – planta- atmosfera.

Desde hace tiempo se vienen implementando modelos de educación basados en STEM, acrónimo de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, con el objetivo de fomentar principalmente el desarrollo de vocaciones científicas y de la ingeniería. Este modelo de educación propone dos características esenciales: la primera se basa en la enseñanza-aprendizaje de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas de forma integrada, y no como áreas de conocimiento separadas; la segunda, comprende un enfoque de ingeniería fundado en el desarrollo de conocimientos teóricos que tienen una aplicación en la realidad y a través de resolución de problemas (Urgilés Cárdenas, J, 2019). [9]

Con el fin de afrontar la resolución de este problema resulta ineludible el conocimiento de algunos conceptos básicos, que van a conformar la trama de la situación planteada. En el siguiente apartado se presentarán algunos aspectos relacionados con la introducción del concepto a nivel didáctico, para más adelante ofrecer una propuesta en la cual se incluyen actividades que permitan la integración de los conceptos ligados a la temática.

2. Nociones sobre la función coseno

Existen al menos dos formas tradicionales para la introducción de las funciones trigonométricas. Una parte del estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, incluyendo las identidades trigonométricas fundamentales y realizando algunas demostraciones sin ningún tipo de explicación ni ilustración de su origen. Luego se definen las funciones trigonométricas como un tipo de funciones circulares sin hacer demasiado énfasis en los conceptos de función, ni de función circular Se presentan algunas identidades que relacionan los ángulos cuadrantales con su ángulo de referencia y se demuestran basándose en las propiedades de los triángulos congruentes y los valores absolutos y signos de las coordenadas de los ángulos. También se presentan y resuelven algunas ecuaciones trigonométricas y se plantean problemas de aplicación. Finalmente se presentan y demuestran las leyes del seno y del coseno.

Otro enfoque empieza definiendo y analizando las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, presentando algunas identidades que involucran los ángulos de referencia con los ángulos cuadrantales y las demostraciones. A la vez se van proponiendo problemas de aplicación. Luego se definen las funciones trigonométricas sobre la circunferencia unitaria y se realizan las representaciones y análisis de sus gráficas incluyendo las inversas. Posteriormente se estudian otras aplicaciones y las leyes del seno y del coseno. Finalmente se presentan las identidades y las ecuaciones trigonométricas. (Fiallo Leal, J.L., 2010) [2].

Según Markel, (1982) [4], entre los factores que contribuyen a que los estudiantes no comprendan los conceptos trigonométricos se destaca el enfoque de las funciones circulares, porque elimina el papel del triángulo rectángulo, y por lo tanto no se puede construir basándose en el conocimiento previo de los estudiantes. Los estudiantes que usan el método de la razón, dónde las funciones trigonométricas son definidas como las razones entre pares de lados en un triángulo rectángulo, tienen mayor éxito y una mejor actitud hacia el tema que los alumnos que usan el método del circulo unidad, donde el seno y el coseno son definidos como las coordenadas de un punto en un círculo unidad (Orhun, 2001) [6].

Por lo expuesto, en este trabajo se sigue el enfoque que define a las funciones trigonométricas como las razones entre pares de lados en un triángulo rectángulo.

De la Figura 1 surge que el segmento que une el origen O de un sistema coordenado con un punto P, junto a los respectivos segmentos que unen a las proyecciones de P sobre los ejes coordenados x e y, conforman un triángulo rectángulo. Entre los lados del triángulo es posible establecer algunas relaciones en forma de cocientes, denominadas razones trigonométricas de un ángulo. El ángulo viene determinado por los lados del triángulo. Así pueden definirse tres razones trigonométricas básicas: seno α, coseno α y tangente α y tres relaciones más, originadas por la expresión inversa de las definidas y que son cosecante α, secante α y cotangente α.

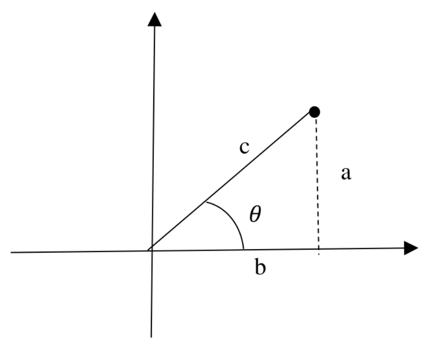


Figura 1: Definición de las razones trigonométricas.

$sen\ \theta =$ cateto opuesto/hipotenusa $= a/c$
$cos\ \theta =$ cateto adyacente/hipotenusa $= b/c$
$tan\ \theta =$ cateto opuesto/cateto adyacente $= a/b$

Si en el gráfico anterior se dibuja una circunferencia de radio 1 (Figura 2), entonces la hipotenusa como fue definida tiene un valor igual a la unidad, con lo cual las dos primeras razones se pueden escribir como:

$sen\ \theta = a$
$cos\ \theta = b$

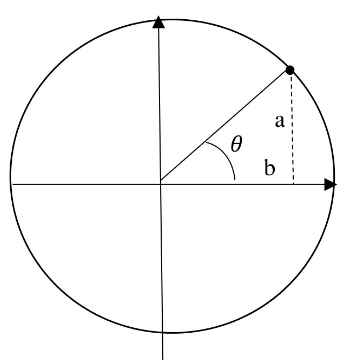


Figura 2: El triángulo rectángulo en el círculo unitario.

De esta forma, las funciones *sen* θ y *cos* θ siempre adquieren valores comprendidos entre 1 y -1.

La Figura 3 muestra la gráfica de la función $f(x) = cos\theta$.

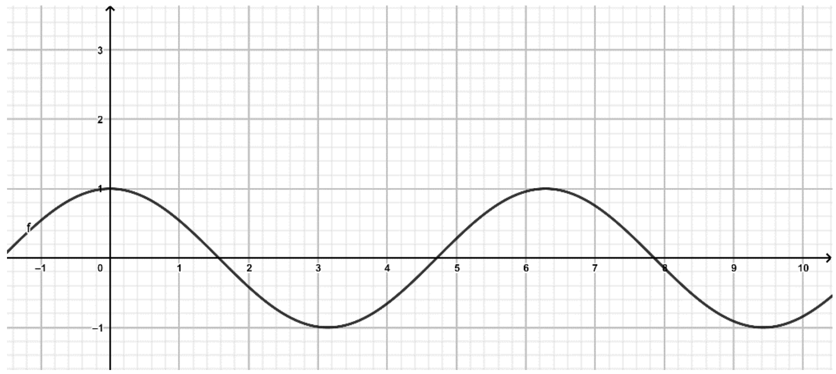


Figura 3: Gráfico de la función coseno.

Las características fundamentales de la función coseno son las siguientes:

1. Su dominio son los números reales y es una función continua.
2. Su recorrido es $-1, 1$ ya que $-1 \leq cos\ x \leq 1$.
3. Corta al eje x en los puntos $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
4. Corta el eje y en el punto $(0, 1)$
5. Es par, simétrica respecto del eje Y, o sea: $cosx = cos(-x)$
6. Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a,b) donde:
$$a = (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \text{ y } b = 2 \cdot k \cdot \pi \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}$$
7. Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma (a,b) donde:
$$a = 2 \cdot k \cdot \pi \text{ y } b = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \text{ siendo } k \in \mathbb{Z}$$
8. Sus máximos relativos ocurren en los puntos de coordenadas $(2 \cdot k \cdot \pi, 1)$, con $k \in \mathbb{Z}$
9. Sus mínimos relativos ocurren en los puntos de coordenadas $(\pi + 2 \cdot k \cdot \pi, -1)$ con $k \in \mathbb{Z}$
10. Es una función periódica de periodo 2π, o sea: $cosx = cos(x + 2\pi)$
11. La función $f(x) = cos(k \cdot x)$ también es periódica y su periodo es $p = \dfrac{2\pi}{k}$.
12. para $|k| > 1$ el periodo disminuye y para $0 < |k| < 1$ el periodo aumenta.
13. Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1

Como se mencionó en las características, la función coseno tiene un patrón repetitivo y por ello se llama función periódica. Se define el *periodo* como la longitud del intervalo más pequeño que contiene exactamente una copia del patrón repetido. Para esta función su periodo es 2π. (Figura 4)

Además, cualquier parte de la gráfica que muestre éste patrón sobre un periodo se llama *ciclo*. Por ejemplo, la gráfica de $y = cosx$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo. En el caso de esta función suele denominarse al ciclo como onda cosenoidal.

La *amplitud* de la gráfica es otra de las características de la función. La amplitud puede definirse como la mitad de la distancia entre el valor máximo y el valor mínimo de la función. En otros términos, es la cantidad entre la cual varia por arriba y debajo del eje de las x, la función. En símbolos:

$$Amplitud = \frac{máximo - mínimo}{2}$$

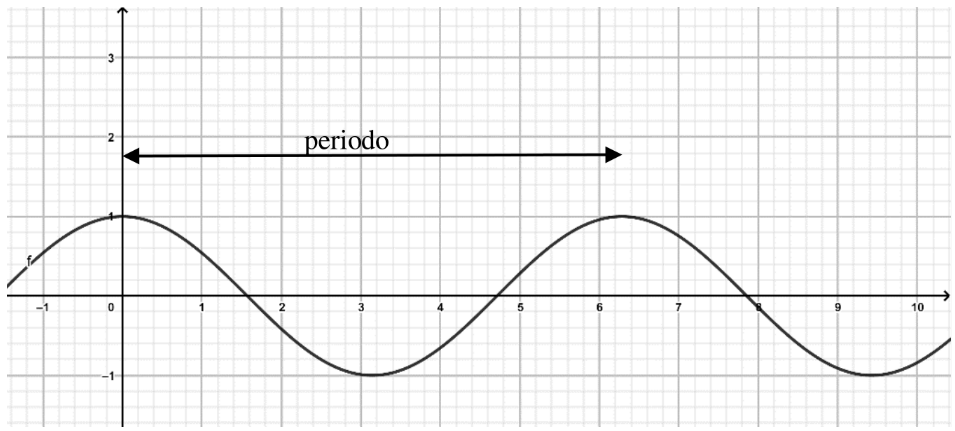


Figura 4: Periodo de la función $f(x) = cosx$.

Desplazamiento horizontal y vertical de la función

Transformaciones elementales en la función producirá que la misma se desplace tanto sobre el eje vertical como sobre el horizontal. En general si la operación afecta la función, el desplazamiento será sobre el eje y . En cambio, si afecta a la variable la función se desplazará sobre el eje x.

Respecto de las transformaciones verticales o cambios a lo largo del eje y, estas son transformaciones que mueven la función hacia arriba o hacia abajo en el eje y. Un desplazamiento horizontal hace que la función se desplace a izquierda o derecha. En ambos casos el resultado es una nueva función.

Para que el desplazamiento ocurra sobre el eje y, a la función se le deberá sumar (o restar) una constante k . Para que ocurra una traslación horizontal se deberá sumar (o restar), una constante k a la variable x. Se supone una constante k positiva. O sea:

$y = f(x) + k$, la función se desplazará k unidades hacia arriba

$y = f(x) - k$, la función se desplazará k unidades hacia abajo

$y = f(x + k)$, la función se desplazará k unidades a la derecha

$y = f(x - k)$, la función se desplazará k unidades a la izquierda

En la Figura 5 se muestran distintos desplazamientos de la función en estudio para $k = 2$.

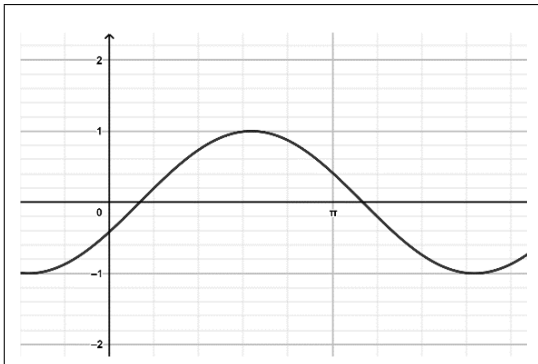
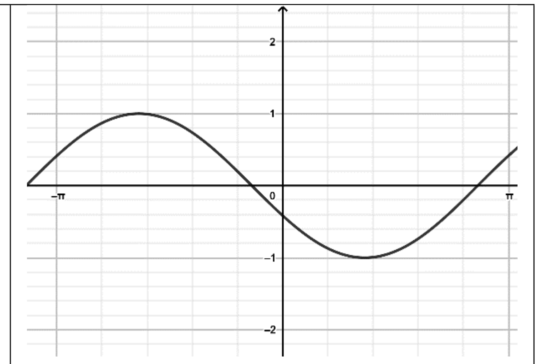
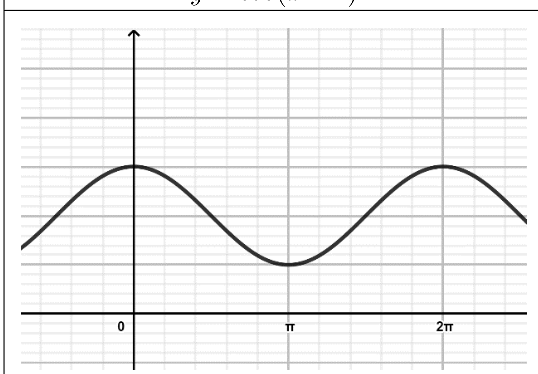
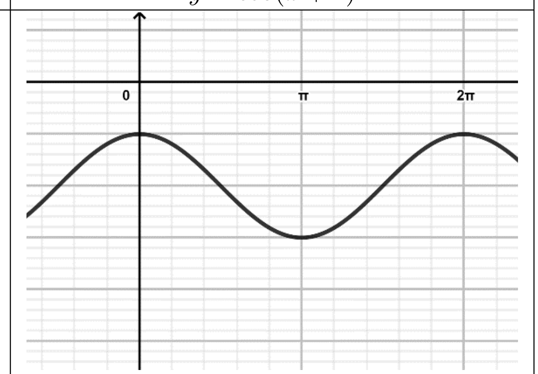
	
$y = cos(x - 2)$	$y = cos(x + 2)$
	
$y = cos(x) + 2$	$y = cos(x) - 2$

Figura 5: Desplazamientos horizontal y vertical de la función $y = cosx$

Es posible combinar las transformaciones para que en el resultado final se obtenga funciones desplazadas en ambas direcciones. La forma general de éstas serán de la forma $y = f(x + k) + h$, donde k y h son constantes.

3. La variación de la temperatura y el uso de la función coseno

Existen diversos trabajos donde se pone de manifiesto la importancia de la temperatura para el desarrollo de los cultivos. Haciendo alusión a ella se han podido determinar los requerimientos térmicos de varios cultivos para su desarrollo. Los cultivos se desarrollan dentro de determinados rangos determinados por el valor de la temperatura máxima y mínima para alguna región de interés. Conocer la distribución de la temperatura máxima y mínima es de importancia para conocer y planificar la época donde los cultivos pueden ser sembrados.

Es sabido que las temperaturas van cambiando a lo largo del año y autores como Bingham (1963), citado por Gutierrez (1979) [3], han señalado que los valores de las temperaturas máximas y mínimas para un año se pueden determinar utilizando un análisis armónico. También, de acuerdo a estos autores, la aplicación de la función coseno describe bastante bien la distribución de las temperaturas máximas y mínimas anuales para el caso de Chile, mediante la forma:

$$y(t) = a_0 + Acos(t - \phi)$$

Donde:

$y(t)$ representa a la temperatura máxima o mínima, a_0 es la media anual de la temperatura correspondiente, A es la diferencia entre la temperatura media y la máxima temperatura anual y, ϕ es la distancia dada por la cantidad de días entre el 1 de julio y el día que corresponde al máximo de la curva.

4. Presentación del problema

En la naturaleza es común encontrar fenómenos que presentan eventos que se repiten una y otra vez, o sea que presentan un comportamiento periódico. Por ejemplo, la variación diaria de la marea, el cambio de temperatura durante del día.

Argentina está ubicada en el hemisferio sur, su clima se caracteriza por ser variado en las distintas zonas que componen el territorio debido a la extensión de su superficie. En Azul Buenos Aires, Argentina (O59°51'30.74", S36°46'37.13"), los veranos son calientes húmedos y mayormente despejados los inviernos son fríos y parcialmente nublados. Durante el día la temperatura varía en general de 2 2 grados centígrados a 29 grados centígrados y rara vez baja a menos de -3 grados y no sube más de 33 grados. Las temperaturas máximas diarias disminuyen en 2 grados centígrados pasando de 14 grados a 12 grados y rara vez bajan a menos de 8 grados, ni exceden los 18 grados. Las temperaturas mínimas diarias disminuyen 2 grados centígrados pasando de 4 a 2 grados y rara vez bajan a menos de -3 grados ni exceden 10 grados centígrados. El día 7 de enero es el día más caluroso del año en Azul y la temperatura mínima es de 15 grados y la máxima de 29 grados, mientras que el 18 de julio es el día más frío del año cuando la temperatura varía entre 2 grados y 12 grados. En Tabla 1 se presentan las temperaturas máximas y mínimas en grados centígrados para Azul.

Mes	E	F	M	A	M	J
T°Max	29.2	28.1	25	21.2	17.1	13.6
T°Min	13.8	13.4	11.5	7.9	4.9	2.5
Mes	J	A	S	O	N	D
T°Max	13.4	15.2	17.8	20.2	23.9	27.3
T°Min	2.3	2.8	4.5	7.5	9.9	12.4

Tabla 1: Temperaturas promedio máxima y mínima en ºC para Azul

Extraído de https://www.weather-arg.com/es/argentina/azul-clima

El mes con el promedio de temperatura baja más alto es Enero (13.8°C). El mes más frío (con el promedio de temperatura baja más bajo) es Julio (2.3°C).

Con base en ello, con los datos ofrecidos nos proponemos encontrar el gráfico y la expresión algebraica de una función que explique adecuadamente la evolución de la temperatura en función del tiempo. Además, responder:

1. ¿Cuántos días habrán pasado desde el día más caluroso para que la temperatura sea de 20°C?

2. ¿En cuál día de la primavera cuya temperatura es 16 °C?
3. ¿Cuál es la temperatura en el día de Navidad?
4. ¿Cuál es la temperatura el 11 de septiembre?

5. Resultados

Para resolver esta situación, en la Figura 6 se grafican los puntos con el objetivo de visualizar la forma de la curva y determinar a cuál función corresponde el gráfico. Luego, se identificará el periodo y la amplitud y a su vez se trazará un plan para crear el modelo y se definirá la función algebraicamente.

Usando los datos de la Tabla 1 puede representarse la temperatura media máxima y temperatura media mínima en función de los meses. La variable independiente en el eje x, serán los meses y la variable dependiente en el eje y, representará la temperatura máxima media. De la tabla surge el gráfico de la Figura 6:

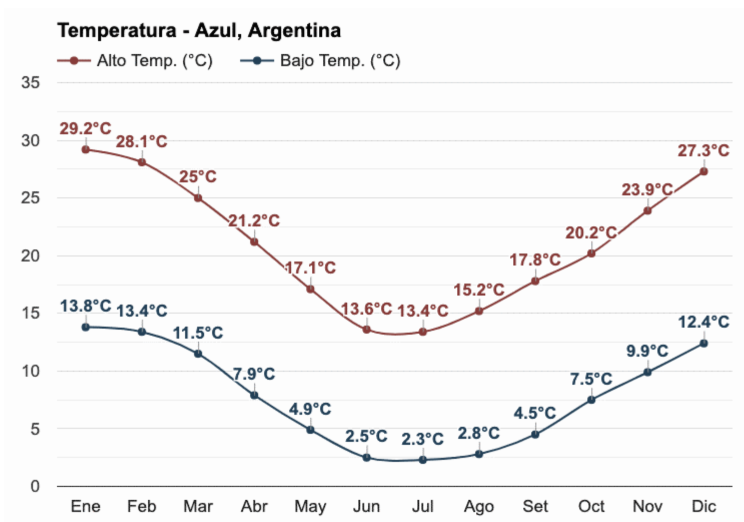


Figura 6: Representación de las temperaturas

Extraído de https://www.weather-arg.com/es/argentina/azul-clima

Este gráfico puede asimilarse tanto a una función seno como a una función coseno. Sin embargo, parece más adecuado y sencillo optar por la función coseno la cual corta al eje Y en el punto $(0,1)$, es decir cuando $x=0$, donde se presenta uno de sus máximos. El interés se centra en lograr una función que explique las variaciones que sufre la temperatura máxima media a través de los días. Por lo tanto, habrá que utilizar como variable independiente $(ejex)$ a los días transcurridos, en lugar de los meses como esta presentado en la tabla.

Se sabe que el día 7 de enero es el día más caluroso del año en Azul y el 18 de julio es el día más frío del año. Así surge del gráfico que para el 7 de enero la temperatura media (se habla de temperatura máxima del día) es 29.2 y en ese punto hay un máximo relativo de la función. Algo análogo ocurre en el día 18 de julio que presenta la temperatura media del día más baja, lo cual indica que en ese punto hay un mínimo relativo de la función. Resumiendo, en los puntos P(7 enero, 29.2) y P(18 julio, 13.4) la función presenta un máximo y un mínimo respectivamente. Sin embargo, esta forma de expresar las coordenadas de los puntos no es útil desde el punto de vista matemático. Se debería elegir un día origen, que represente el origen de coordenadas, y de allí en adelante ir representando cada fecha como los días transcurridos a partir de ese día origen.

Supongamos que se elige como origen el día 7 de enero (será el origen de coordenadas del sistema cartesiano). Para calcular los días transcurridos desde el 7 de enero hasta el 18 de julio, pueden contarse los días en un calendario o puede usarse alguna calculadora especial, por ejemplo, la ofrecida en la página:
https://es.calcuworld.com/calendarios/calculadora-de-tiempo-entre-dos-fechas/
Así usando esta calculadora y considerando el año 2019 surge que entre el 7 de enero y el 18 de julio hay 192 días. Luego el origen estará en 7 de enero ($x = 0$) y el 18 de julio se ubicará a 192 días de este ($x = 192$). Resumiendo:

1. El *eje horizontal* representa el transcurrir del tiempo en días teniendo en cuenta que son días después de enero 7.
2. El *eje vertical* representa la temperatura en grados centígrados.
3. El 7 de enero la temperatura máxima promedio es 29 grados centígrados mientras que para el día más frío la máxima promedio es de 13,4 grados centígrados.

Entonces, con esta nueva escala para el eje X puede afirmarse que en el punto $PE(0, 29.2)$ la función presenta un máximo relativo y que el $PJ(192, 13.4)$ hay un mínimo relativo de la función.

Se está modelando la temperatura media mediante una función coseno la cual se sabe cíclica. Por lo tanto, si el 7 de enero de 2019 hay cierta temperatura media (29,2) se espera que, al año siguiente, el 7 de enero de 2020, o sea 365 días después se presente la misma temperatura media. Luego tendremos un segundo máximo relativo en el punto $P(365, 29.2)$.

Se pretende encontrar una expresión para la función coseno que represente al fenómeno. Es decir, se quiere encontrar una función

$$y = f(x) = A \cdot cos(Bx) + C \tag{1}$$

donde y es la temperatura media y x son los días transcurridos después del 7 de enero.

Así es que la temperatura y en función de los días x será igual a cierta *amplitud* A que hay que encontrar, multiplicada por coseno de algún argumento que va a incluir los días y también habrá que incluir cierta relación de la función.

¿Cuál sería la línea media? La línea media se ubica justo a la mitad entre el valor máximo y el valor mínimo. Calculando el promedio entre 29.2° C y 13.4° C se obtiene este punto medio 21.3° C. Esto significa que se está trasladando a la función coseno en 21.3 unidades hacia arriba, si fuera la función coseno usual tendría su línea media en el eje x pero esta función la estamos trasladando en 21.3 con lo cual se ha determinado el valor $C = 21.3$ de la ecuación (1).

Llamando $P_1(0, 21.3)$ (punto medio) y $P_2(0, 13.4)$, y recordando que el máximo está en $PE(0, 29.2)$. ¿Cuál es la amplitud de la función? Que es igual que preguntar que tanto se aleja la función de la línea media. Desde el punto al punto máximo (PE) al punto medio

(P_1) se bajan 7.9 unidades y del punto medio al punto P_2 se bajan también 7.9 unidades. Es decir que la amplitud buscada para la ecuación (1) es $A = 7.9$.

Falta determinar el *argumento* la función coseno. Se ha establecido que es una función de los días y se desea que cuando hayan transcurrido 365 días este argumento debe ser 2π, así es que cuando $x = 365$ el argumento debe ser igual a 2π. Por lo tanto, si multiplicamos a x por $2\pi/365$ se logra que el argumento sea 2π cuando $x = 365$. Luego $B = 2\pi/365$ en la ecuación (1).

Habiendo encontrado los valores buscados: $A = 7.9$,$B = 2\pi/365$ y $C = 21.3$ queda establecida la expresión algebraica de la función buscada:

$$y = f(x) = A \cdot cos(Bx) + C = 7.9cos(2\pi/365x) + 21.3 \tag{2}$$

Se deben contestar ahora las preguntas:

¿Cuántos días, al menos, habrán pasado desde el día más caluroso para que la temperatura sea de 20°C? Para ello teniendo en cuenta la ecuación (2) puede escribirse;

$$y = 7.9cos\left(\frac{2\pi}{365}x\right) + 21.3$$

Entonces si se desea que la temperatura sea 20ºC, dado que las abscisas representan la temperatura será: $y = 20$. Despejando el coseno se obtiene;

$$\frac{20 - 21.3}{7.9} = cos\left(\frac{2\pi}{365}x\right)$$

$$arc\ cos\left(\frac{20 - 21.3}{7.9}\right) = \frac{2\pi}{365}x$$

Para este cálculo hay que tener la precaución de utilizar la medida del ángulo en radianes. Para obtener el ángulo mediante la función inversa del coseno puede usarse una calculadora de bolsillo o la calculadora en línea que se ofrece en la página web https://es.planetcalc.com/326/?license=1. En este caso en grados seria 99,53 lo que en radianes equivale a 1.7371319. Hay que recordar que además existe otro ángulo cuyo coseno es mismo que el del encontrado.

$$arc\ cos(-0.165569632) \approx \frac{2\pi}{365}x \quad \Rightarrow 1.7371319 \approx \frac{2\pi}{365}x$$
$$x \approx \frac{1.7371319 \cdot 365}{2\pi} \approx 100.91 \text{ días} \cong 101 \text{ días}$$

El día más caluroso se registró el 7 de enero de 2019 al cual se tomó como origen de coordenadas, Si a esta fecha se le suman 101 días, el resultado es el día 18 de abril de 2019. Teniendo en cuenta que el coseno es negativo en el II y en el II cuadrante, habrá otro día cuya temperatura sea 20° pero que será posterior al encontrado. El mismo puede estimarse observando el gráfico y su cálculo queda a cargo del lector.

En forma análoga se procede para responder a la pregunta: ¿En cuál día de la primavera la temperatura es de 16°C?

Si $y = 16$

$$\frac{16 - 21.3}{7.9} = cos\left(\frac{2\pi}{365}x\right)$$

$$arc\ coos\left(\frac{16 - 21.3}{7.9}\right) = \frac{2\pi}{365}x$$

$$arc\ cos(-0.670886076) \approx \frac{2\pi}{365}x \quad \Rightarrow 2.3061993498 \approx \frac{2\pi}{365}x$$

$$x \approx \frac{2.3061993498 \cdot 365}{2\pi} \approx 133.90 \text{ días} \cong 134 \text{ días}$$

Sumando 134 días al 7 de enero se llega al día 21 de mayo que no es primavera en nuestro hemisferio. Pero existe otro punto de la función, que corresponde al valor encontrado. Sabiendo que el ángulo buscado en grados seria 132,13 lo cual en radianes equivale a 2.3061993498 y teniendo en cuenta que existe otro ángulo cuyo coseno es negativo, habría que encontrar la fecha en que se registran nuevamente 16 y confirmar si es o no primavera. Esta tarea queda a cargo del lector.

Para responder la pregunta: ¿Cuál es la temperatura en el día de Navidad? Se procede del siguiente modo Desde el día más cálido, 7 de enero, que fue fijado como origen y el día de navidad transcurrieron 351 días:

$$y = 7.9cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 351\right) + 21.3 \approx 7.9cos(6.04228641) + 21.3$$

$$y \approx 10 \cdot (0.9711239122) + 21.3 \approx 28.97$$

Es decir, en el día de Navidad la temperatura fue de 28, 97°.

De forma análoga se responde a: ¿Cuál es la temperatura el 11 de septiembre?

Desde el día 7 de enero al 11 de septiembre hay 247 días, por lo tanto:

$$y = 7.9cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot 247\right) + 21.3$$

$$y \approx 7.9cos(4.25190896) + 21.3$$

$$y \approx 7.9 \cdot (-0.4443781793) + 21.3 \approx 17.79°\text{C}$$

Luego la temperatura del día 11 de setiembre es de aproximadamente 17,79 grados centígrados.

Para realizar los cálculos anteriores puede usarse la calculadora que ofrece la página: https://es.planetcalc.com/307/.

Conclusiones

Se logra un aprendizaje del tipo significativo, cuando es posible que nuevos conceptos se acoplen sin dificultad a otros ya establecidos con anterioridad y que se hallan lo suficientemente claros y a disposición en la estructura cognitiva del alumno.

En este nivel, puede pensarse que el fracaso en la comprensión de las funciones trigonométricas se debe a que no se aprenden teniendo en cuenta la covariación entre variables de igual o distinta naturaleza, o que no se permite entenderlas a través de un modelo matemático; la modelización es considerada como una herramienta para la representación de situaciones contextualizadas y en este trabajo una problemática inherente a carreras de Ingeniería Agronómica.

Si bien es cierto que la construcción de un modelo no es una actividad inmediata, conocer el contexto y desplegar habilidades para explicar, fijar y representar las relaciones existentes entre las variables, harán que se pueda construir un nuevo objeto matemático del que no será posible considerar e identificar todas las magnitudes involucradas en el fenómeno pero que se harán las simplificaciones y supuestos necesarios para construirlo de manera que se represente el fenómeno. A esto, el pensamiento variacional hará posible que se puedan desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular.

Así que trabajos áulicos de esta especie permiten a los alumnos aprender de manera activa, alcanzar una alta capacidad de respuesta, iniciativa y disposición ante situaciones propias de la carrera. También es otra manera de poder resolver problemas, integrando el manejo de la tecnología de la información, el trabajo en equipo y la toma de decisiones. En resumen, la importancia del modelo STEAM está en el tipo de pensamiento que fomenta y en las habilidades para el desenvolvimiento en el mundo de la profesión: el trabajo en equipo y el arribo a las mejores soluciones.

Referencias

[1] Caballero Soler, O. (2013) *Una transición de la geometría a la trigonometría, utilizando problemas históricos de la astronomía como recurso didáctico en la clase de matemáticas.* (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia Facultad de Ciencias Bogotá, Colombia). Repositorio Institucional Universidad de Colombia. 11

[2] Fiallo Leal, J.L. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* (Tesis de Doctorado de la Universitat de Valencia. Departamento de Didáctica de la Matemática). Repositorio Universitat de València. 12

[3] Gutierrez, J.R. (1979). *Curvas de distribución anual de temperaturas máximas y mínimas en Chile.* Ciencia e investigación agraria Vol. 6, (3). 177-183 16

[4] Markel, W. D. (1982). *Trigonometry - Forgotten and abused?* School Science and Mathematics, 82, 548-551. 12

[5] Montiel, G., Buendía, G., Beltran P., Santos Z. (2012). *Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico.* Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa. 518-527.

[6] Orhun, N. (2001). *Student´s Mistakes and Misconceptions on Teaching of Trigonometry.* The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference New Ideas in Mathematics Education. 208-211. 11

[7] Parra-Coronado, A., Fischer G., B. Chaves-Córdoba B. (2015) *The thermal time for Productive Phenological Stages of Pineapple* Acta Biológica Colombiana, 20 (1): 163-173. 13

[8] Tavera, F. A., Villa-Ochoa, J. A. (2013). El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas. Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe. REDUMATE - PUCMM 666 - 676.

[9] Urgilés Cárdenas, J. (2019). *Cápsula — ¿Stem o Steam?* UCUENCA. Recuperado: `https://www.ucuenca.edu.ec/component/content/article/233-espanol/investigacion/blog-de-ciencia/1236-steam?Itemid=437` 11

[10] Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* (Tesis doctoral, Universidad Real de Utrecht). Recuperado: `https://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf` 12

[11] Villa-Ochoa, J. A., Ruiz, H. M. (2010). *Pensamiento variacional: seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de nociones variacionales.* Educação Matemática Pesquisa, 12(3), 514 - 528 11

[12] Weber, K. (2005). *Students' Understanding of Trigonometric Functions. Mathematics* Education Research Journal, 17(3), 91 - 112 11

11