Chaves y Salcedo. 2023. Límite de funciones lineales a partir de la negación y del registro gráfico. Revista Sigma, 19 (1). Páginas 24–35.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Volumen XIX № 1 (2023)

Límite de funciones lineales a partir de la negación y del registro gráfico

Andrés Chaves Beltrán [1]
Víctor Manuel Salcedo Rosero[2]

Abstract: A teaching proposal for students of differential calculus is presented. An alternative to conceptually approach the formal definition ε - δ is proposed for limits of functions, for this it is emphasized in negation of the mathematical definition of limit and the graph of the function.

Keywords.
Limit, graph of function, negation of limit.

Resumen: Se presenta una propuesta de enseñanza para estudiantes de cálculo diferencial, la cual tiene como objetivo dar una alternativa de acercamiento conceptual a la definición formal ε - δ para límites de funciones, para ello se enfatiza en negación de la definición matemática de límite y se usa el registro gráfico de la función.

Palabras Clave.
Límite, gráfica de función, negación de límite.

[1]Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, e mail: ancbel@udenar.edu.co
[2]Egresado de licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, email: victorsalcedorosero@gmail.com

1. Introducción

Los cursos de cálculo a nivel universitario presentan un alta mortalidad por parte de los estudiantes, uno de los motivos se asociados es la introducción del infinito en operaciones propias de esta subdisciplina de las matemáticas, como lo son la derivada y la integral. Cabe decir que estas operaciones usan como base el concepto de límite, el cual acoge usos conceptuales del infinito matemático.

En estos cursos, normalmente se opta por introducir primero el concepto de límite de funciones y luego el de continuidad de una función en un número. Tiene sentido tal propuesta, debido a que para demostrar la continuidad de una función en un número, se necesita tres condiciones:

- Verificación de que el número pertenezca al dominio de la función.
- Verificación de la existencia del límite de la función en el número.
- Verificación de que el límite sea igual a la evaluación de la función en el número.

Así, si la verificación del límite no es problema, la comprobación de la continuidad de una función en un número es bastante sencilla.

La tesis doctoral [1], propone que la continuidad debe ser abordada antes que el límite de una función, de hecho, el autor de tal tesis se centra fuertemente en la idea de discontinuidad puntual como apoyo a la construcción del concepto de continuidad. Para este artículo no se acoge completamente la propuesta [1], es decir, se opta por la manera tradicional de introducir primero límites y después continuidad, pero se acoge la idea de enfatizar en la negación del límite (como analogía a la discontinuidad), con el propósito de reconocer, en el registro gráfico, la ubicación de ε y δ, las desigualdades y los cuantificadores asociados a la definición.

El objetivo de la negación de la definición matemática de límite es producir una toma de conciencia de las regulaciones que el sujeto pone en juego, de manera automática, cuando define un objeto por sus caracteres positivos descuidando aquellos aspectos negativos que contribuyen a establecer una definición coherente del objeto, esta afirmación se hace siguiendo la tesis [1], donde citando a [2] plantea que "la importancia de movilizar esquemas asociados a definiciones en términos de entornos, y por tanto figurativos, hacia los esquemas relacionados con definiciones en términos de distancia entre puntos y por tanto esquemas operativos, genera una asociación que contribuye a la encapsulación simbólica de procesos y conceptos que progresivamente conduzcan a la determinación de la relación ε - δ".

Normalmente se dedica más tiempo al cálculo de límites que al proceso de comprensión de la definición formal en términos de ε - δ. En esta propuesta se apunta a acercarse a esto último, sin pretender que sea una construcción de la definición.

Nota de agradecimiento. los autores agradecen a los estudiantes de cálculo I del programa de física de los semestres A2021 y A2022 y los estudiantes de cálculo diferencial del semestre B2022 de Licenciatura en Matemáticas, todos de la Universidad de Nariño, con quienes se ha trabado en propuesta.

2. La propuesta

Se presenta en dos momentos, el primer momento, denominado igualdad, estudia las condiciones que debe cumplir δ para que se pueda demostrar que $\lim_{x\to 2}(-3x+1) = -5$. El momento dos, denominado desigualdad, estudia las condiciones que deben cumplir ε y x para poder demostrar que $\lim_{x\to 2}(-3x+1) \neq 2$.

A continuación, se presenta la definición de límite de una función y la negación de la misma, para posteriormente comenzar con los momentos.

2.1. Definición de límite de una función

se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x del dominio de f se cumple que si $0 <\mid x-a \mid< \delta$ entonces $\mid f(x) - L \mid< \epsilon$. Esto se representa de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

2.2. Negación de la Definición

L no es el límite de f cuando x tiende a a, si existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe x perteneciente al dominio de f que cumple que $0 <\mid x-a \mid< \delta \quad \wedge \quad \mid f(x) - L \mid\geq \varepsilon$. Esto se denota por

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq L$$

2.3. Igualdad

Veamos en la gráfica que $0 < \delta \leq \dfrac{\epsilon}{3}$ sirve para demostrar la igualdad

$$\lim_{x\to 2}(-3x+1) = -5$$

Solución

Se debe tener en cuenta que la estrategia es encontrar δ el cual debe cumplir con la definición de límite, dada en el apartado 2.1.

Ahora, reemplazando los valores de este ejercicio ejercicio en las desigualdades de la definición se tiene

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-a \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid f(x)-L \mid< \varepsilon \\ 0 <\mid x-2 \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid (-3x+1)-(-5) \mid< \varepsilon \end{aligned}$$

Para dar solución de la forma analítica al ejercicio, es suficiente con encontrar un $\delta > 0$ que cumpla la siguiente implicación

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-2 \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid -3 \mid\mid x-2 \mid< \varepsilon \\ 0 <\mid x-2 \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad 3 \mid x-2 \mid< \varepsilon \end{aligned}$$

de aquí que

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-2 \mid &< \delta \\ \mid x-2 \mid &< \delta \\ 3 \mid x-2 \mid &< 3\delta \end{aligned}$$

Ahora, igualando 3δ con ε se llega a que

$$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Así, $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ sirve para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (-3x+1) = -5$$

Nótese que según la definición, δ no tiene que ser único, sin embargo los libros de texto y tutoriales que abordan ejercicios similares consideran suficiente la identificación de este valor de δ.

En este artículo, se considera que la identificación de otros valores de δ pueden servir para acercarse a una mejor comprensión de la definición de límite, ya que normalmente se omite que todos $\delta \in (0, \dfrac{\varepsilon}{3})$ sirven para demostrar la igualdad inicial.

A continuación, se presenta una solución donde se hace un análisis de la gráfica del ejercicio haciendo uso de las pre-imágenes y además se interpretan los valores absolutos como intervalos, es decir

$$\begin{aligned} 0 <\mid x-a \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid f(x)-L \mid< \varepsilon \\ 0 <\mid x-2 \mid< \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid -3(x)+1-(-5) \mid< \varepsilon \end{aligned}$$

Lo que significa que

$$x \in (2-\delta, 2+\delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (-5-\epsilon, -5+\epsilon) \tag{1}$$

La estrategia es encontrar δ tal que cumpla 1, para visualizar lo anterior considere la gráfica de la figura 1.

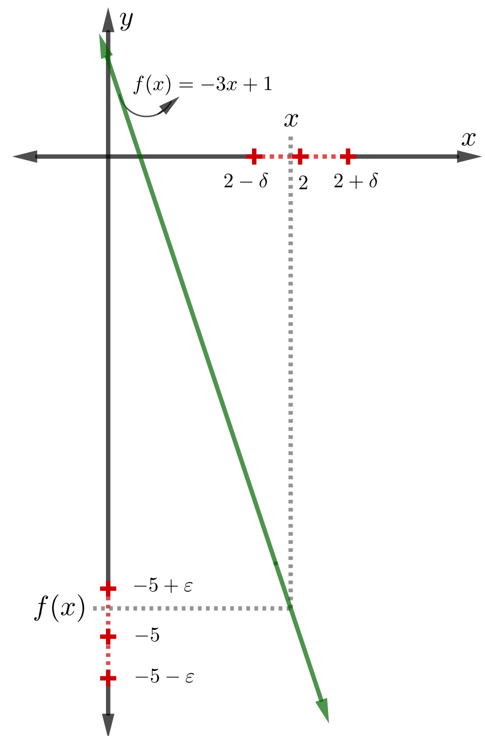

Figura 1: Visualización de la definición de límite en el momento 2.1

Es decir, se quiere encontrar los valores de δ que permitan verificar que si $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ entonces $f(x) \in (-5-\varepsilon, -5+\varepsilon)$.

Teniendo esto en cuenta el objetivo es poder caracterizar δ para hacer esto posible es necesario encontrar la preimagen de $f(x) = -3x + 1$ la cual es

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$$

El objetivo de encontrar $f^{-1}(x)$ es localizar el conjunto preimagen del intervalo $(-5+\varepsilon\ ,$ $-5-\varepsilon)$ (ver en la figura 2 este intervalo señalado en en el eje y a través de líneas punteadas de color rojo), las cuales, por las características de la función f, podemos obtener evaluando:

$$f^{-1}(-5+\varepsilon) = 2 - \frac{\varepsilon}{3} \quad y \quad f^{-1}(-5-\varepsilon) = 2 + \frac{\varepsilon}{3}$$

Así, $f^{-1}(-5-\varepsilon, -5+\varepsilon) = (2-\frac{\varepsilon}{3}, 2+\frac{\varepsilon}{3})$, este último intervalo se ve en la figura 2, en el eje x.

Ubicando estos valores en el plano cartesiano, se tiene

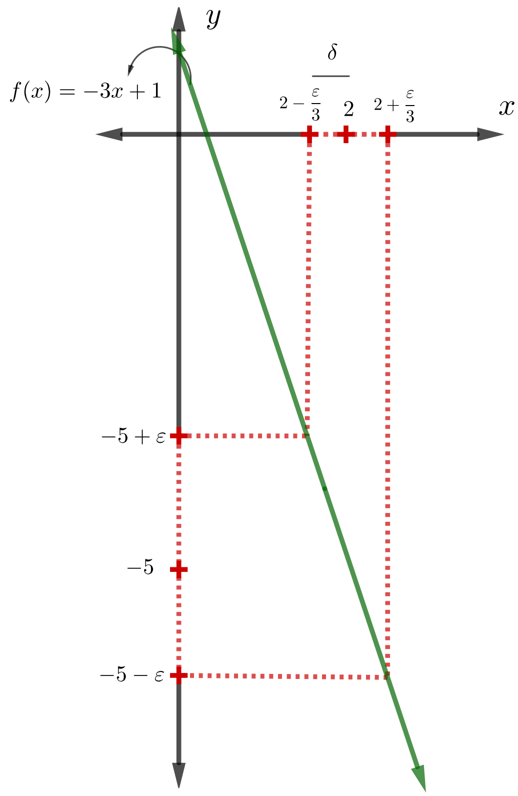

Figura 2: Localización de pre-imágenes

Analizando la figura 1 y la figura 2 resulta que con los valores localizados (ver figura 2) la distancia de 2 a $2 + \frac{\varepsilon}{3}$ y $2 - \frac{\varepsilon}{3}$ es

$$|2 - (2 + \frac{\varepsilon}{3})| = |2 - (2 - \frac{\varepsilon}{3})| = \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

Y por otro lado teniendo en cuenta la figura 1 la distancia de 2 a $2 - \delta$ y $2 + \delta$ es

$$|2 - (2 - \delta)| = |2 - (2 + \delta)| = \delta$$

El valor encontrado en 2 índica el valor máximo que puede tomar δ para que 1 se cumpla, así la caracterización de los δ está dada por

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Note que si se toma $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ cumple la condición requerida, pues

$$\begin{aligned} 0 <\mid x - 2 \mid < \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid -3 \mid \mid x - 2 \mid < \varepsilon \\ \mid x - 2 \mid < \delta \quad &\Rightarrow \quad \mid x - 2 \mid < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Como $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, se tiene

$$\mid x - 2 \mid < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Y por propiedad transitiva se tiene lo buscado

$$\mid x - 2 \mid < \frac{\varepsilon}{3}$$

Nota. Se sugiere verificar gráficamente, que si hay variaciones de tamaño para ε en la gráfica, los δ identificados sirven. También se sugiere verificar gráficamente que si se toma $\delta > \frac{\varepsilon}{3}$, existirá un $x \in Domf$ para el cual no se cumple que $f(x) \in (-5-\varepsilon, -5+\varepsilon)$.[3]

2.4. Desigualdad

Estudiemos gráficamente las condiciones para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (-3x+1) \neq 2$$

Solución
Usando la descripción dada en el apartado 2.2, debemos interpretar gráficamente que existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in Domf(x)$ que cumple que

$$0 <\mid x-a \mid< \delta \quad \wedge \quad \mid f(x) - L \mid \geq \varepsilon \tag{3}$$

Ahora, reemplazando los valores del ejercicio en 3 se tiene

$$0 <\mid x-2 \mid< \delta \quad \wedge \quad \mid -3(x)+1-(2) \mid \geq \varepsilon$$

Lo anterior se puede representar en intervalos, así

$$x \in (2-\delta, 2+\delta) \quad \wedge \quad f(x) \notin (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \tag{4}$$

La estrategia consiste en encontrar un ε y un $x \in Domf$ tal que cumpla 4. Para lograr el objetivo de caracterizar los ε que cumplan 4 primero se ubica en en el eje x de la gráfica, un intervalo $(2-\delta, 2+\delta)$ y luego se debe ubicar en el eje y a $f(2-\delta, 2+\delta)$. Por características de la función, será útil hallar las imágenes de los extremos $f(2-\delta)$ y $f(2+\delta)$, así

$$f(2-\delta) = -5+3\delta$$
$$f(2+\delta) = -5-3\delta$$

Se puede ver la ubicación de estos valores en el eje y de la gráfica de la figura 3, donde se ve que $f(2-\delta, 2+\delta) = (-5-3\delta, -5+3\delta)$.

[3] Se sugiere verificarlo con un $x \in (f^{-1}(-5-\varepsilon, 2-\frac{\varepsilon}{3})$.

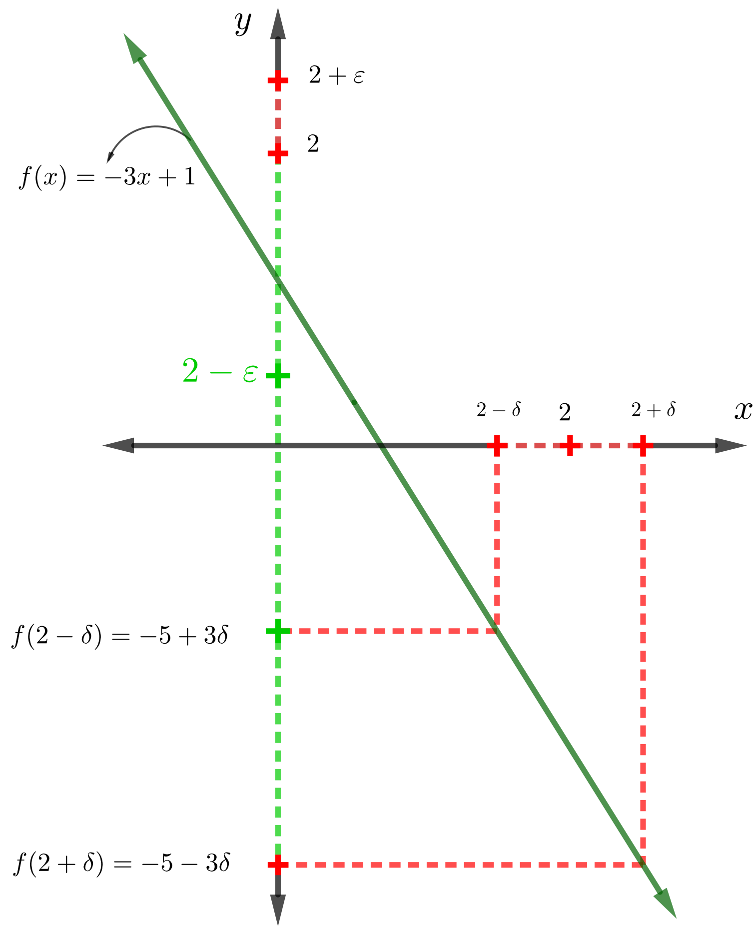

Figura 3: Localización de $f(2-\delta)$ y $f(2+\delta)$

Para verificar que se cumpla 4 se van a analizar tres ubicaciones distintas para $2-\varepsilon$ en el eje y de la figura 3,[4] para ello se sugiere tener en cuenta el rango verde claro, es decir, el intervalo $(-5-3\delta, 2)$.

- El primer caso a analizar es cuando

$$2-\varepsilon \in (-5+3\delta, 2)$$

para estudiar mejor este caso considere la figura 4

[4]Estudiaremos el caso en el que δ es pequeño, esto quiere decir que δ es tal que $2 \notin (f(2+\delta), f(2-\delta))$, o en otras palabras que $\delta < \dfrac{7}{3}$ para ello fijarse en el eje y. Si se quiere estudiar el caso en el que δ sea grande, es decir que $2 \in (f(2+\delta), f(2-\delta))$ (o en otras palabras, que $\delta > \dfrac{7}{3}$), se puede hacer un análisis similar al que viene a continuación.

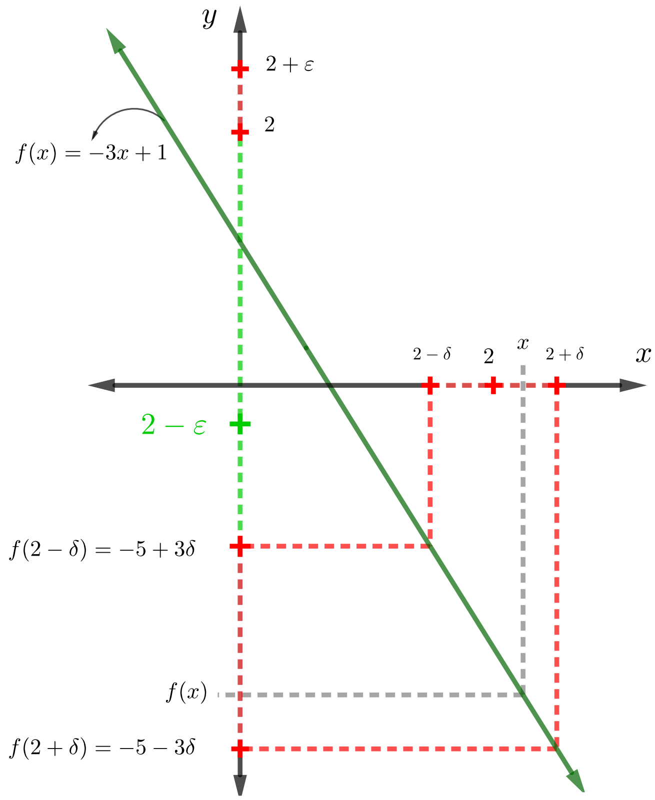

Figura 4: Primer caso cuando $2-\varepsilon \in (-5+3\delta, 2)$

Nótese en la figura 4 que para que se cumpla 4, debe ocurrir que $2-\varepsilon$ esté en el rango verde,[5] y esto se cumple para todos los $x \in (2-\delta, 2+\delta)$. Así, resumiendo este caso, dado $\delta < \frac{7}{3}$, un ε que sirve para demostrar que

$$\lim_{x \Rightarrow 2} (-3x+1) \neq 2$$

es aquel cumpla que $2-\varepsilon(-5+3\delta, 2)$, ya que para toda $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ se tiene que $f(x) \notin (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$.

- El segundo caso es el que requiere más atención, y se da cuando

$$2-\varepsilon \in (-5-3\delta, -5+3\delta)$$

Considérese la figura 5. En este caso a diferencia del anterior no se va a cumplir para todas las $x \in (2-\delta, 2+\delta)$, sino para un subintervalo del mismo, note que 4 se cumplirá cuando $x \in (f^{-1}(2-\varepsilon), 2+\delta)$, para ello se debe tener en cuenta la inversa de la función f, la cual está dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$$

así $f^{-1}(2-\varepsilon) = \frac{-1+\varepsilon}{3}$, luego el intervalo donde debe estar x para que se cumpla 4 es $(\frac{-1+\varepsilon}{3}, 2+\delta)$, así

$$x \in (\frac{-1+\varepsilon}{3}, 2+\delta) \quad \wedge \quad f(x) \notin (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$

[5]tener en cuenta que el rango verde de esta figura 4 es ligeramente menor que el rango verde claro de la figura 3.

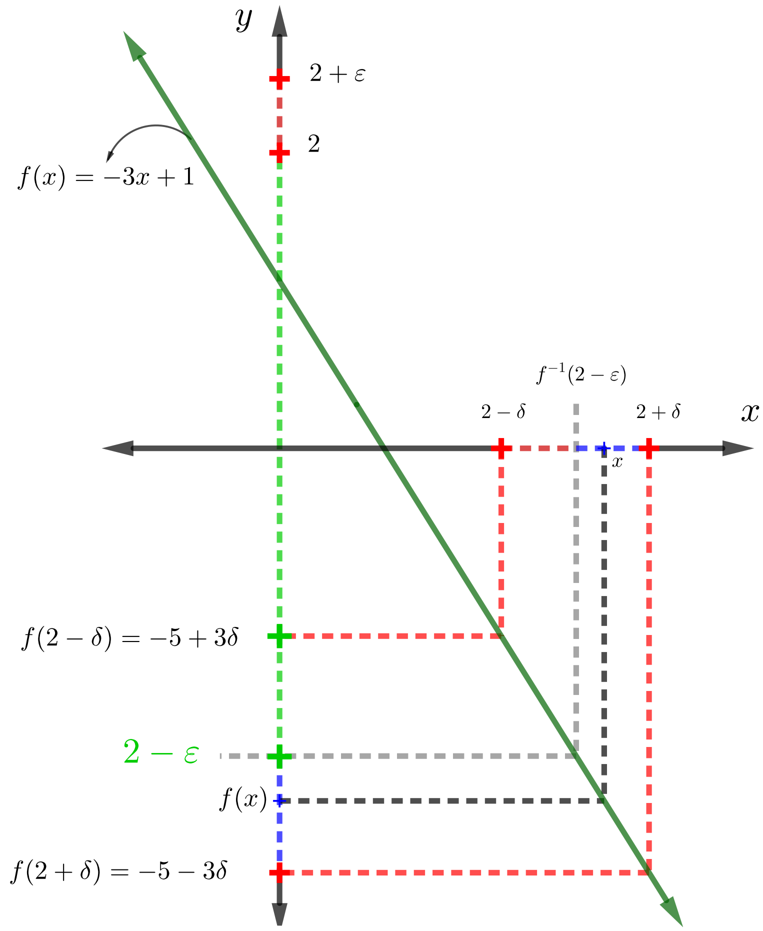

Figura 5: Segundo caso cuando $2-\varepsilon \in (-5-3\delta, -5+3\delta)$

Al ser este caso más complejo que el anterior, se presenta resumido de la siguiente manera: dado $\delta < \dfrac{7}{3}$, un ε y un x que sirven para demostrar que

$$\lim_{x \Rightarrow 2}(-3x+1) \neq 2$$

están dados por la siguiente condición:

$2-\varepsilon \in (-5-3\delta, 2)$ y $x \in (f^{-1}(2-\varepsilon), 2+\delta)$.

- El tercer caso se da cuando

$$2-\varepsilon \in (-\infty, -5-3\delta)$$

Para estudiar este caso considere la figura 6

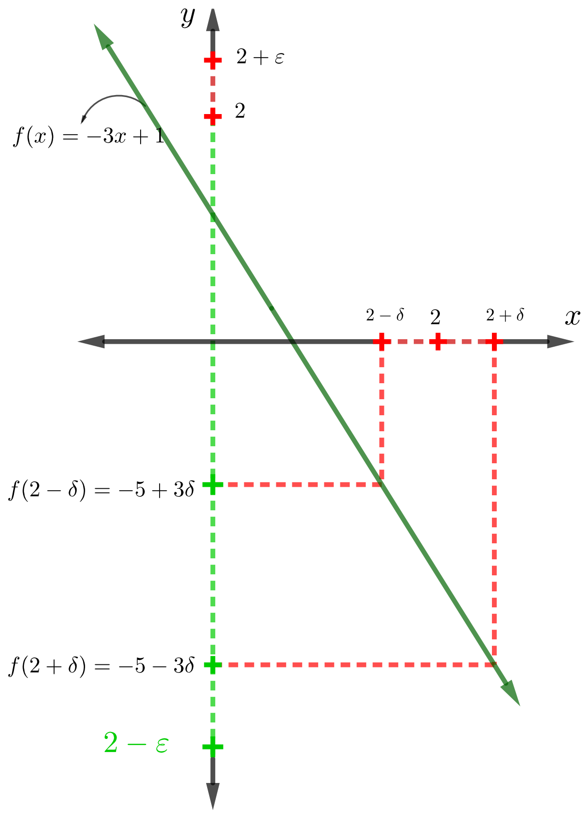

Figura 6: Tercer caso cuando $2-\varepsilon \in (-\infty, -5-3\delta,)$

En este caso no existe x que cumpla lo pedido en 4, ya que si $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ entonces $f(x) \in (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Por lo tanto, dado $\delta < \dfrac{7}{3}$, un ε menor que $-5-3\delta$ no sirve para demostrar que

$$\lim_{x \Rightarrow 2}(-3x+1) \neq 2$$

3. Comentarios

- La interpretación gráfica de

$$\lim_{x \to 2}(-3x+1) = -5$$

  es sencilla, de hecho, gran parte de textos consideran suficiente la verificación del caso $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ para demostrar esta igualdad, incluso, algunos de estos textos llegando a dar una interpretación gráfica. Sin embargo, para un mejor acercamiento a la definición de límite se sugiere enfatizar que $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3}$ también sirve, pero que $\delta > \dfrac{\varepsilon}{3}$ no sirven para tal propósito.

- Para funciones lineales es fácil la identificación de los δ que permiten demostrar la igualdad del límite, de hecho por método analítico se puede hacer sin mayor dificultad. Para funciones no lineales, el manejo de desigualdades se puede dificultar, sería por ello interesante tratar de extender la interpretación gráfica a funciones de mayor complejidad.

- La interpretación gráfica de
$$\lim_{x\to 2}(-3x+1) \neq -5$$
es más compleja que la de la igualdad. De acuerdo a la propuesta planteada en este artículo, se debe dividir en dos partes, la primera, que es desarrollada aquí, fue para cuando $\delta \leq \frac{7}{3}$, para ello se identificaron tres casos de ubicación de $2-\varepsilon$. Dos de esos casos sirven para demostrar lo pedido. La segunda parte, no desarrollada en este artículo, es cuando $\delta > \frac{7}{3}$, lo cual lleva a un análisis similar a la primera parte, y se sugiere al lector que la desarrolle.

- El caso de la desigualdad no lo hemos explorado en detalle para funciones no lineales, sin embargo queda la inquietud de que tan buen recurso sea para funciones más elaboradas y que permitan graficarse, tales como para funciones polinómicas, o funciones trascendentales, o incluso para funciones discontinuas a trozos.

Referencias

[1] Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Universidad Autónoma de Barcelona. Tesis de doctorado. 25

[2] Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary Lecture at the *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 19) PME*, Recife, Brasil, July 1995. 25

[3] Siqueira, F. K. da S., Lorin, J. H. (2020). Obstáculoc epsitemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso do matemática. *Revista Paranaense de Educaçao Matemática*, 9(19), 555–577. Recuperado de https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6210