Delgado y Soto. 2023. Área de un triángulo construido a partir de un rectángulo. Revista Sigma, 19 (1). Páginas 1–9.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XIX № 1 (2023), páginas 1–9

Área de un triángulo construido a partir de un rectángulo

Leonel Delgado Eraso [1]

Óscar Fernando Soto Ágreda [2]

Abstract: The formulas for the areas of geometric figures such as the circle (πr^2), the area of the ellipse ($ab\pi$), the volume of the sphere $\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$, the volume of an ellipsoid $\left(\frac{4\pi abc}{3}\right)$, among others, are applied almost mechanically from the radius or the values of the parameters a, b, c, as the case may be. These formulas are calculated with the gadgets of analytical geometry.

For the areas of other figures such as the square, the triangle, the rhombus, the rectangle, etc., their formulas are established through synthetic geometry.

In this article it is proposed to calculate the area of a triangle composed within a rectangle that is formed by drawing line segments from two vertices of the rectangle reaching the opposite sides of such vertices of the same rectangle. This area for particular cases is obtained through synthetic geometry and in others it is necessary to resort to analytical geometry, inevitably. In the content of the document is the summarized process to address said area and the digressions that can be extracted from the process.

The interest of the question lies in finding the fraction that represents the shaded area with respect to the unit, this being the total area of the square. For example, a diagonal divides the square into two triangular regions with an area equal to half of the total, two diagonals divide the square into four congruent triangular regions and therefore each one corresponds to a quarter of the unit, and equal, is You can calculate the fraction of area that a portion bounded by a diagonal and a median, for example, or by two medians represents, using the rudiments of synthetic geometry.

Keywords. Areas, triangle, rectangle, shaded areas.

[1] Licenciado en matemática de la Universidad de Nariño, especialista en docencia universitaria U.C.C, Especialista en estadística de la Universidad Nacional y Magister en Investigación de Operaciones y Estadística de la universidad de Nariño en convenio con la Universidad Tecnológica de Pereira. Correo: lederudenar@hotmail.com

[2] Director del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño, Especialista en Computación para la Docencia de la Universidad Mariana y Magister en Modelos de Enseñanza Problémica de la Universidad de Nariño. Correo: fsoto@udenar.edu.co

Resumen: Las fórmulas de las áreas de las figuras geométricas como la del círculo (πr^2), el área de la elipse ($ab\pi$), el volumen de la esfera $\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$, el volumen de un elipsoide $\left(\frac{4\pi abc}{3}\right)$, entre otras, se aplican casi de forma mecánica a partir del radio o los valores de los parámetros a, b, c, según sea el caso. Estas fórmulas se calculan con los artilugios propios de la geometría analítica.
Para las áreas de otras figuras como la del cuadrado, el triángulo, el rombo, el rectángulo, etc, sus fórmulas se establecen mediante la geometría sintética.
En éste artículo se propone calcular el área de un triángulo compuesto dentro de un rectángulo que se forma al trazar segmentos de rectas a partir de dos vértices del rectángulo llegando a los lados opuestos a tales vérticces del mismo rectángulo. Esta área para casos particulares se obtienen mediante geometría sintética y en otros toca recurrir a la geometría analítica, de manera inevitable.
En el contenido del documento se encuentra el proceso resumido para abordar dicha área y las digresiones que se pueden extraer del proceso.
El interés de la cuestión, estriba en encontrar la fracción que representa el área sombreada con respecto a la unidad, siendo esta, el área total del cuadrado. Por ejemplo, una diagonal divide al cuadrado en dos regiones triangulares de área igual a la mitad del total, dos diagonales particionan al cuadrado en cuatro regiones triangulares congruentes y por ello cada una se corresponde con la cuarta parte de la unidad, e igual, se puede calcular la fracción de área que representa una porción limitada por una diagonal y una mediana, por ejemplo, o por dos medianas, utilizando los rudimentos de la geometría sintética.

Palabras Clave. Áreas, triángulo, rectángulo, áreas sombreadas.

1. Problema

En un rectángulo las longitudes a, b se trazan dos segmentos desde dos vértices contiguos del rectángulo a sus lados “opuestos”, tal como se indica en la Figura **1**

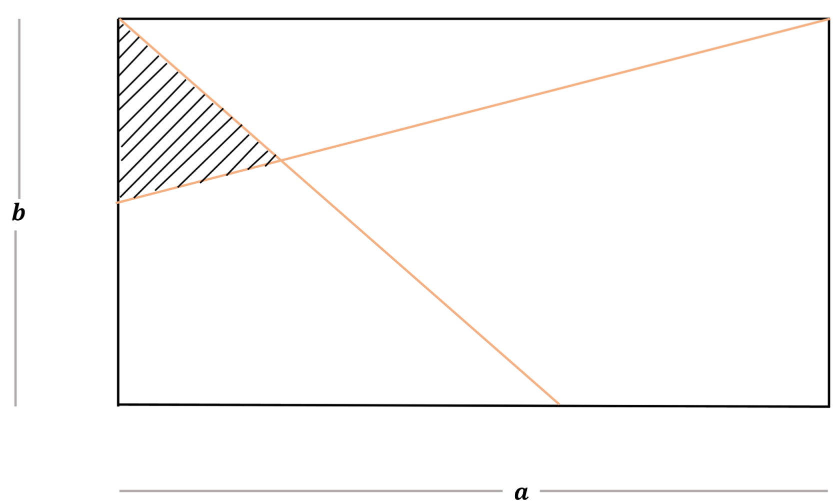

Figura 1

Calcular el área del triángulo formado por los dos segmentos de rectas, adjunto a uno de los vértices donde nace un Segmento de recta y que aparece sombreado en la gráfica Anterior.

1.1. Solución

En términos generales, este problema de apariencia simple, no se puede resolver por los mecanismos de la geometría sintética y debe abocarse con elementos propios de la geometría analítica. De este modo, se convierte en un ejemplo de lo que no es posible en un modelo geométrico, puede ser posible en otro. En el modelo sintético es factible resolver los casos en los que uno de los segmentos es una diagonal del rectángulo y el otro una mediana, o el problema en que los dos segmentos son medianas, pero en otros casos, la dificultad impera. Por ejemplo, el caso "diagonal-mediana" de la Figura 2 requiere del trazo de la otra diagonal adicional, como se muestra en la Figura 3. En el rectángulo $ABCD$, F es el punto medio del lado AD y con ello se ha trazado la diagonal BD y la mediana CF.

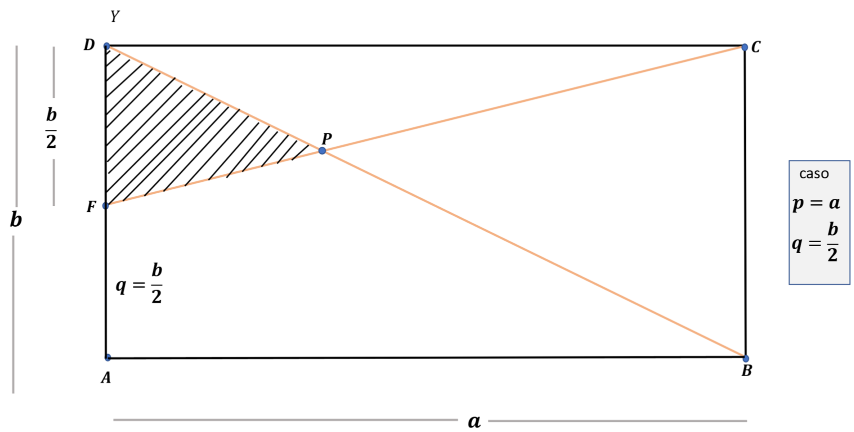

Figura 2

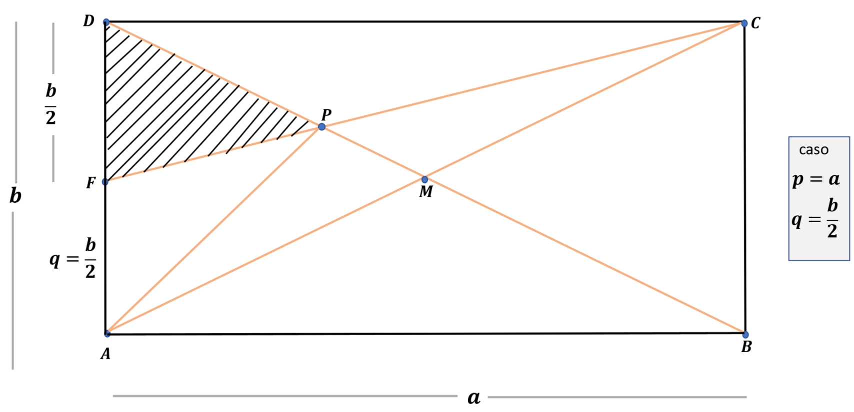

Figura 3

Con el trazo de la diagonal AC, para el triángulo rectángulo ADC el punto P es su baricentro y por ello, los tres triángulos DPC, DPA y APC tienen igual área al ser el triángulo ADC la mitad de la superficie total. Además, F es el punto medio del lado AD y por esta razón el triángulo FPD, es la mitad del triángulo DPA y con esta consideración del área sombreada es la doceava parte del total del rectángulo $ABCD$. Pero la situación particular, en la que uno de los segmentos es mediana y otro un punto está a la cuarta parte del vértice, no tiene resolución sintética y requiere del uso de recursos distintos. Este caso particular se presenta en la Figura 4, en la que F es un punto a la cuarta parte del lado AD del rectángulo y E es punto medio del lado AB.

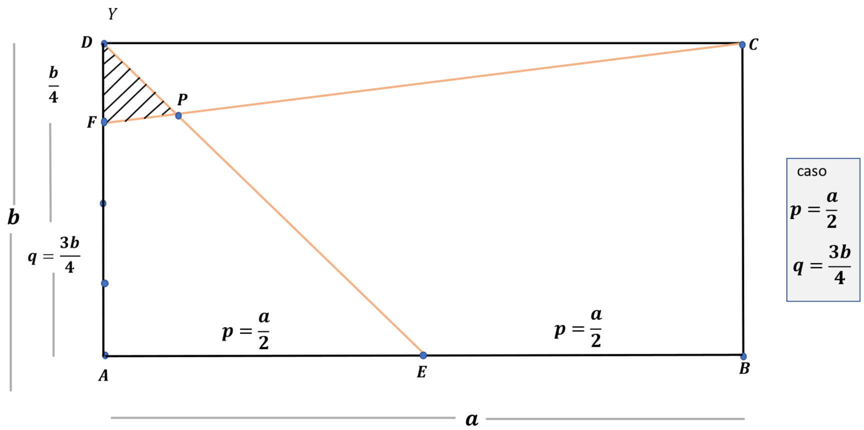

Figura 4

1.1.1. ¨Proceso analítico. (caso general)

Se ubica el rectángulo en el plano cartesiano, haciendo coincidir uno de los vértices (A) del rectángulo en el origen $(0, 0)$. De esta manera se obtienen las siguientes coordenadas de los puntos que se pueden determinar en forma directa. También se ha simbolizado con **p** la distancia que uno de los segmentos de recta corta al lado **a**, y con **q** la distancia que el otro segmento corta al lado **b**. En la Figura 5 se indica la notación y las coordenadas de los puntos establecidos de manera general, siendo que dos lados consecutivos, subyacen en los ejes coordenados.

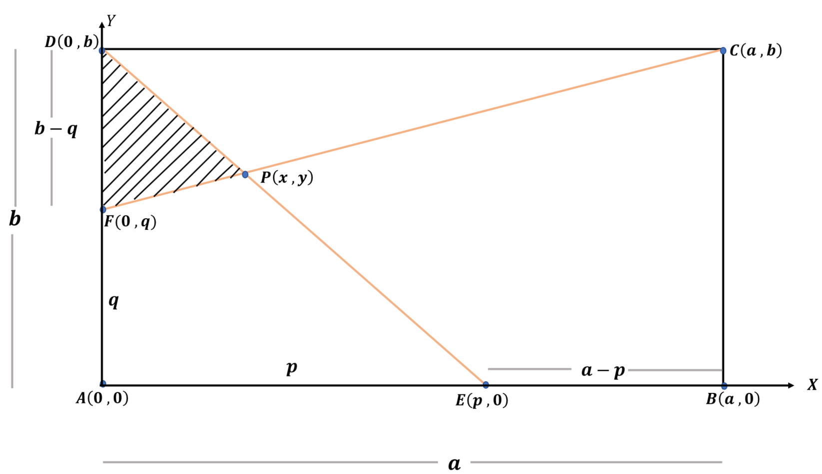

Figura 5

Las ecuaciones de las rectas que contienen a los segmentos de recta que definen el triángulo son:

$$y = \frac{b-q}{a}x + q$$
$$y = -\frac{b}{p}x + b$$

Con estas ecuaciones se encuentran las coordenadas del punto *P(x,y)*, punto de corte de los dos segmentos de recta. Este punto tiene las coordenadas

$$\left[\frac{ap(b-q)}{p(b-q)+ab} \quad ; \quad \frac{pb(b-q)+abq}{p(b-q)+ab}\right]$$

Conocidas estas coordenadas se calculan las medidas o longitudes de los lados del triángulo, cuya área está en estudio.

$$\overline{DF} = b - p$$
$$\overline{FP} = \frac{p(b-q)}{p(b-q)+ab}\sqrt{a^2+(b-q^2)}$$
$$\overline{DP} = \frac{a(b-q)}{p(b-q)+ab}\sqrt{p^2+b^2}$$

Con estos datos, el área del triángulo sombreado se puede calcular aplicando la fórmula Herón ya que se conocen las dimensiones de sus tres lados, pero tal cálculo es engorroso, no difícil y requiere de cuidado.

Otro camino, es aplicar el cálculo integral para hallar el área del triángulo sombreado, usando las ecuaciones de la recta y los límites de integración 0 y $\frac{ap(b-q)}{p(b-q)+ab}$, así.

$$A = \int_0^{\frac{ap(b-q)}{p(b-q)+ab}} \left[-\frac{b}{p}x + b - \left(\frac{b-q}{a}x + q\right)\right] dx$$

$$A = \left(-\frac{p(b-q)+ab}{2ap}x^2 + (b-q)x\right)\Bigg|_0^{\frac{ap(b-q)}{p(b-q)+ab}}$$

y en definitiva,

$$A = \frac{ap(b-q)^2}{2[p(b-q)+ab]}$$

La cual corresponde al área del triángulo sombreado de la Figura 5 para cualquier dimensión del rectángulo $ABCD$ y diferentes valores de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$.

1.2. Disgresión 1

La relación entre el segmento $\overline{FC}$ y el lado del triangulo $\overline{FP}$ es

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{FC}} = \frac{p(b-q)}{p(b-q)+ab}$$

Es decir, el lado del triángulo $\overline{FP}$ es con exactitud, la $\frac{p(b-q)}{p(b-q)+ab}$ parte del segmento $\overline{FC}$. Por ejemplo, en el caso en que el triángulo se defina con una mediana y el segmento a la cuarta parte se tiene $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{3b}{4}$ con lo que se consigue que $\frac{\overline{FP}}{\overline{FC}} = \frac{1}{9}$. Es decir, $\overline{FP}$ es la novena parte de $\overline{FP}$. Si $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{7b}{8}$ la relación es $\frac{\overline{FP}}{\overline{FC}} = \frac{1}{17}$, lo que indica que, $\overline{FP}$ es la diecisieteava parte de $\overline{FC}$; Si $p = \frac{a}{4}$ y $q = \frac{7b}{8}$ se llega a $\frac{\overline{FP}}{\overline{FC}} = \frac{1}{33}$, y así de seguido en gran infinidad de casos particulares.

(Nota: La distancia $\overline{FC}$ se calcula con teorema de Pitágoras, a partir del triángulo rectángulo $\overline{FDC}$).

1.3. Disgresión 2

La longitud del segmento $\overline{DE}$, aplicando la distancia euclídea o el teorema de Pitágoras es $\sqrt{p^2 + b^2}$.

La relación entre $\overline{DE}$ y el lado del triángulo $\overline{DP}$ es:

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \frac{a(b-q)}{p(b-q)+ab}$$

Es decir, el lado del triángulo sombreado $\overline{DP}$ divide exactamente en $\frac{a(b-q)}{p(b-q)+ab}$ partes iguales al segmento $\overline{DE}$. Por ejemplo, en el caso en que el triángulo se defina con una mediana y el segmento a la cuarta parte se tiene $p = \dfrac{a}{2}$ y $q = \dfrac{3b}{4}$ con lo que se consigue que $\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \dfrac{2}{9}$. Es decir, $\overline{P}$ es igual a dos novenas partes de $\overline{DE}$; si $p = \dfrac{a}{2}$ y $q = \dfrac{7b}{8}$ la relación es $\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \dfrac{2}{17}$, lo que indica que, $\overline{DP}$ es dos diecisiete-avas partes de $\overline{DE}$; si $p = \dfrac{a}{4}$ y $q = \dfrac{7b}{8}$ se llega a $\frac{\overline{DP}}{\overline{DE}} = \dfrac{4}{33}$, y así de seguido en gran infinidad de casos particulares.

1.4. Disgresión 3

Para los valores de $p = \dfrac{a}{i}$ y $q = \dfrac{b}{j}$, el área del triángulo sombreado se puede expresar en una fracción del área del rectángulo $ABCD$, así:

$$A = \frac{ap(b-q)^2}{2[p(b-q)+ab]} = \frac{a\left(\frac{a}{i}\right)\left(b - \frac{b}{j}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{i}\right)\left(b - \frac{b}{j}\right) + ab\right]} = \frac{\frac{a^2b^2(j-1)^2}{ij^2}}{\frac{2ab(j-1+ij)}{ij}}$$

$$A = \frac{ab(j-1)^2}{2j(j-1+ij)} = \frac{ab}{\frac{2j(j-1+ij}{(j-1)^2}}$$

1.4.1. Ejemplo 1

En el caso, en el cual $p = a$ y $q = \frac{b}{2}$ y según la Figura 2 se obtiene que las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos $\overline{FC}$ y el segmento $\overline{DE}$, respectivamente son:

$$y = \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2}$$
$$y = \frac{b}{a}x + b$$

El punto de corte de las rectas anteriores, es:

$$P\left(\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}\right)$$

El área del triángulo sombreado con el camino de integrales es:

$$A = \int_0^{\frac{a}{3}} \left[-\frac{b}{a}x + b - \left(\frac{b}{2a}x + \frac{b}{2}\right)\right] dx$$

$$A = \left(-\frac{3b}{4a}x^2 + \frac{b}{2}x\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{3}}$$

$$A = -\frac{3b}{4a}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \frac{b}{2}\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{ab}{12} + \frac{ab}{6} = \frac{ab}{12}$$

El área del triángulo sombreado, aplicando la fórmula es,

$$A = \frac{ap(b-q)^2}{2[p(b-q)+ab]} = \frac{a(a)\left(b-\frac{b}{2}\right)^2}{2\left[(a)\left(b-\frac{b}{2}\right)+ab\right]} = \frac{\frac{a^2b^2}{4}}{2\left(\frac{ab}{2}+ab\right)} = \frac{\frac{a^2b^2}{4}}{\frac{12ab}{4}} = \frac{ab}{12}$$

Según la digresión 1, para un rectángulo de lados a, b con $p = a$ y $q = \frac{b}{2}$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{FP}} = 1 + \frac{ab}{p(b-q)} = 1 + \frac{ab}{a\left(b-\frac{b}{2}\right)} = 1 + \frac{ab}{\frac{ab}{2}} = 1 + 2 = 3$$

El segmento $\overline{FP}$ del triángulo sombreado divide en exactamente 3 partes iguuales a $\overline{FC}$
Según la disgresión 2, para un rectángulo de lados a, b, con $p = a$ y $q = \frac{b}{2}$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DP}} = \frac{p}{a} + \frac{b}{b-q} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b-\frac{b}{2}} = 1 + 2 = 3 \tag{1}$$

El segmento $\overline{DP}$ del triángulo sombreado divide exactamente en 3 partes iguales a la longitud del lado $\overline{DE}$.

Según la digresión 3, para valores de $p = \frac{a}{1}$ y $q = \frac{b}{2}$, tenemos que $i = 1$ y $j = 2$ y la expresión,

$$\frac{2j(j-1+ij)}{(j-1)^2} = \frac{2(2)(2-1+1*2}{(2-1)^2} = \frac{(4)(3)}{1} = 12$$

indica que el área del triángulo sombreado divide exactamente en 12 partes iguales al área del rectángulo $ABCD$.

1.4.2. Ejemplo 2

En el caso, en el cual $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{3b}{4}$ y según la Figura 4 se tiene que las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos $\overline{FC}$ y el segmento $\overline{DE}$, respectivamente son

$$y = \frac{b}{4a}x + \frac{3b}{4}$$

$$y = -\frac{2b}{a}x + b$$

El punto de corte de las rectas anteriores es

$$P\left(\frac{a}{9}, \frac{7b}{9}\right)$$

El área del triángulo sombreado con el proceso de integrales se obtiene, así:

$$A = \int_0^{\frac{a}{9}} \left[-\frac{2b}{a}x + b - \left(\frac{b}{4a}x + \frac{3b}{4}\right)\right] dx$$

$$A = \left(-\frac{9b}{8a}x^2 + \frac{b}{4}x\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{9}}$$

$$A = -\frac{9b}{8a}\left(\frac{a}{9}\right)^2 + \frac{b}{4}\left(\frac{a}{4}\right) = -\frac{ab}{72} + \frac{ab}{36} = \frac{ab}{72}$$

El área del triángulo sombreado, aplicando la fórmula es,

$$A = \frac{ap(b-q)^2}{2[p(b-q)+ab]} = \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)\left(b-\frac{3b}{4}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{2}\right)\left(b-\frac{3b}{4}\right)+ab\right]} = \frac{\frac{a^2b^2}{32}}{2\left(\frac{ab}{8}+ab\right)} = \frac{\frac{a^2b^2}{32}}{\frac{9ab}{4}} = \frac{ab}{72}$$

Según la digresión 1, para un rectángulo de lados a, b, con $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{3b}{4}$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{FP}} = 1 + \frac{ab}{p(b-q)} = 1 + \frac{ab}{\frac{a}{2}}\left(b - \frac{3b}{4}\right) = 1 + \frac{ab}{\frac{ab}{8}} = 1 + 8 = 9$$

El segmento $\overline{FP}$ del triángulo sombreado divide exactamente en 9 partes iguales a $\overline{FC}$.

Según la disgresión 2, para un rectángulo de lados a, b con $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{3b}{4}$.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DP}} = \frac{p}{a} + \frac{b}{b-q} = \frac{\frac{a}{2}}{a} + \frac{b}{b-\frac{3b}{4}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

El segmento $\overline{DP}$ del triángulo sombreado divide exactamente $4,5$ a la longitud del lado $\overline{DE}$.

Según la disgresión 3, para valores de $p = \frac{a}{2}$ y $q = \frac{3b}{4}$, tenemos que $i = 2$ y $j = \frac{4}{3}$ y la expresión:

$$\frac{2j(j-1+ij}{(j-1)^2} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}-1+2\left(\frac{4}{3}\right)\right)}{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2} = \frac{\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\right)}{\frac{1}{9}} = 72$$

Esto indica que el área del triángulo sombreado divide exactamente en 72 partes iguales al área del rectángulo $ABCD$.

1.4.3. Ejemplo 3

El denominador de la expresión obtenida en la digresión 3, indica las partes en que se pueden dividir el área del rectángulo de dimensión $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ según el área del triángulo sombreado. En la siguiente tabla se observa algunas áreas del triángulo sombreado para algunos casos particulares de $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$

No	**p**	**q**	Área sombreada
1	$\frac{a}{1}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{12}$
2	$\frac{a}{2}$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{ab}{72}$
3	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{20}$
4	$\frac{a}{3}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{28}$
5	$\frac{a}{4}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{36}$
6	$\frac{a}{5}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{44}$
7	$\frac{a}{6}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{52}$
8	$\frac{a}{2{,}5}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{24}$
9	$\frac{a}{1{,}5}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{ab}{16}$

Referencias

[1] L. Galdos.(2002). Matemáticas Galdos, Editorial Cultural.S.A, Madrid-España, 2002 Smith, Robert y otro, Cálculo, Editorial McGraw-Hill

Netgrafia

- https://www.studocu.com/row/document/univerzitet-u-tuzli/cinetica-quimica/pdf-areas-sombreadas-compress-ejercicios-resueltos/17433890
- https://ejerciciosdematescom.files.wordpress.com/2019/09/ejercicios-c381reas