Rúa et al. 2023. GeoGebra y resolución de problemas: una estrategia didáctica para enseñar geometría. Revista Sigma, 19 (2). Páginas. 12-28.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño *Volumen XIX № 2 (2023), páginas 12-28*

GeoGebra y resolución de problemas: una estrategia didáctica para enseñar geometría

Catalina Rúa Alvarez[1]
Deiby Castillo Narvaez[2]
Nathaly Paz Mora[3]

Abstract.

Mathematics is a fundamental subject in the curriculum of Educational Institutions, as it promotes the development of skills such as logic, argumentation, and reasoning. Among the diverse branches of mathematics, geometry holds a prominent position due to the prevalence of geometric elements in our surroundings. It is imperative for educators to capitalize on this reality to encourage students interest in the discipline. Additionally, the pandemic has driven the need to explore virtual teaching and learning methodologies, which remain relevant even after returning to in-person instruction and can be seamlessly integrated into the classroom. This study proposes a didactic sequence that integrates geometry in an engaging manner through problem-solving, with the integration of the GeoGebra Dynamic Geometry Environment (DGE) for enhanced learning experiences. This strategy aligns with the specific requirements of the educational context, providing educators and students with a powerful tool for immersive geometry learning experiences.

Keywords: Geometry, DGE, problem-solving and virtual education.

Resumen.

Una asignatura fundamental en los planes de estudio de las instituciones educativas es la de matemática, dado que promueve el desarrollo de habilidades como la lógica, la capacidad argumentativa y el razonamiento. Entre de las diversas ramas de las matemáticas, la geometría juega un papel destacado debido a la presencia de elementos geométricos en nuestro entorno y en el quehacer docente es crucial aprovechar esta realidad para fomentar el interés de los estudiantes por esta disciplina. Además, por la situación que se presentó en pandemia se vio la necesidad de indagar sobre metodologías que permitieron continuar con los procesos de enseñanza y aprendizaje de forma virtual, las cuales incluso después del retorno a la presencialidad siguieron vigentes y pueden ser implementadas en el aula de clase. Se propone una secuencia didáctica basada en la resolución de problemas y el uso del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) GeoGebra para integrar de manera efectiva la enseñanza de la geometría. Esta estrategia se ajusta a las necesidades del contexto educativo y proporciona una herramienta para el aprendizaje de la geometría tanto para docentes como para estudiantes.

[1]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño. email: catalina.rua@udenar.edu.co
[2]Maestría en Educación, Facultad de Educación, Universidad de Nariño. email: yodeibycn@gmail.com
[3]Maestría en Educación, Facultad de Educación, Universidad de Nariño.email: npaz217@gmail.com

Palabras Clave: Geometría, AGD, resolución de problemas y educación virtual.

1. Introducción

Las matemáticas son una asignatura con un papel relevante en la formación de los estudiantes, es por ello que está incluida en los diferentes planes curriculares de las instituciones educativas, aunque a lo largo de los años se ha convertido en una de las asignaturas que generan mayor dificultad para ser aprendida. Sin embargo, como afirman Muñoz y Mato en [14], la razón no es debido a la asignatura en sí, sino porque, en muchos casos, las clases no motivan, ni dejan desarrollar la creatividad de los estudiantes. Teniendo en cuenta lo anterior, los docentes deben pensar en nuevas estrategias que promuevan el gusto por las matemáticas y sus ramas, además proponer diferentes herramientas que se puedan integrar en las aulas de clase.

A pesar de la necesidad de la aplicación que tiene la geometría al estar presente en el medio que nos rodea, es poco el tiempo que se dedica a enseñarla y tampoco es muy aceptada por los estudiantes en el aula de clase [12]. Además, según Vargas y Gamboa en [24], "el auge de las matemáticas modernas [4] en la década de los setenta provocó que la geometría pasase a segundo termino en el ámbito escolar, relegándose al final de los contenidos anuales". Es así como se ve la necesidad de indagar sobre estrategias que aporten en la enseñanza de la geometría de forma amena, a través de su aplicación en el entorno y el uso de herramientas tecnológicas actuales.

La resolución de problemas promueve la creatividad y como afirma Santos Trigo en [20], cuando el estudiante se enfrenta a una situación problema realiza una reflexión, perfeccionando sus ideas y modificándolas al participar activamente en una comunidad de aprendizaje, con lo cual integra sus conocimientos. En particular, la resolución de problemas geométricos permite fortalecer habilidades como la visualización, el razonamiento y la argumentación, que son muy importantes en los diferentes campos de las matemáticas.

Por otro lado, cabe resaltar que la pandemia cambió la forma de enseñar puesto que fue necesario que los docentes, a través de la planificación de sus sesiones de clase, usaran herramientas tecnológicas para poder obtener logros de aprendizaje en medio de la virtualidad forzada, es decir, debieron usar sus competencias digitales y reinventarse [19]. Es así como es indispensable pensar en estrategias que promuevan el aprendizaje de la geometría por medio de herramientas informáticas, por ejemplo los Ambientes de Geometría Dinámica, AGD.

Entre los diferentes AGD se destaca GeoGebra que es un programa que reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo, lo cual hace que se convierta en una posibilidad para llamar la atención de los estudiantes frente al aprendizaje de la geometría, pues les permite ser más activos, manipular objetos y pueden ver los cambios que realizan en tiempo real, lo cual no sucede cuando se trabaja con lápiz y papel, además es un software libre que se puede utilizar en las instituciones desde su versión en línea o de escritorio, ver [10].

Lo mencionado anteriormente, impulsa la idea de proponer una estrategia didáctica que apoye la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas y la integración del AGD GeoGebra, ya que estos generan una oportunidad de afianzar a los estudiantes en

[4] Las matemáticas modernas hacen referencia al cambio en la forma en que se enseñaba matemáticas en las escuelas primarias, pues se intentó enseñar desde la teoría de conjuntos y el álgebra abstracta.

el desarrollo de sus habilidades, ingenio y creatividad hacia las matemáticas.

2. Marco teórico

En Colombia, como se verifica en [13], los procesos formativos se basan en los Estándares Básicos de Aprendizaje de las diferentes áreas, en particular en la actividad matemática se contemplan cinco procesos generales, los cuales son: modelación, comunicación, razonamiento, comparación y ejercitación, y formulación y resolución de problemas.

La modelación consiste en identificar situaciones variables existentes y la relación entre ellas, permitiendo en una situación problema crear un modelo matemático para hacer predicciones y buscar una solución; la comunicación permite expresar el significado de gráficas, símbolos, diagramas, fórmulas, entre otros, fomentando la discusión alrededor de diferentes situaciones; el razonamiento lógico se comienza a desarrollar desde los primeros grados con materiales físicos y manipulativos, que siguiendo [13] muestra a los estudiantes que las matemáticas "son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas" y en los grados superiores se trabaja con proposiciones, teorías y argumentos que llevan a los estudiantes a establecer conexiones, resolver problemas lógicos y sacar conclusiones. Por otro lado, la comparación y ejercitación de procedimientos hace referencia a la capacidad de realizar un conjunto ordenado de pasos para hacer un cálculo y procesar datos, además, es importante que el docente al resolver una operación, muestre diferentes opciones para que los estudiantes evalúen ventajas y desventajas, y decidan cuál les brinda un proceso de ejecución seguro y rápido.

Finalmente, la formulación y resolución de problemas permite desarrollar habilidades, tomar una actitud insistente para buscar estrategias, encontrar resultados, verificar soluciones, modificar condiciones y crear nuevos problemas, es importante resaltar que el aprendizaje es más significativo cuando los problemas son tomados de un contexto cercano a los estudiantes y relacionados con sus experiencias.

La resolución de problemas es una actividad que no se encuentra aislada a las actividades del quehacer docente, de acuerdo con los Estándares [13] "podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas", pues en el día a día se presentan problemas que requieren de la aplicación de conocimientos para poder encontrar una solución, de ahí la importancia de incluir en la enseñanza de las matemáticas la resolución de problemas. A través de la resolución de problemas lo que se desea es permitir que los estudiantes logren un acercamiento a las matemáticas, para ello como afirman Castillo y Rúa en [5], se le debe dar un lugar importante para captar la atención de los estudiantes y motivar el gusto por las matemáticas, porque no todos tienen la facilidad de aprenderlas.

Por otro lado, los contenidos de matemáticas se desarrollan alrededor de los cinco tipos de pensamiento expuestos en los estándares básicos, que conforman los ejes centrales para el aprendizaje de esta área, cabe aclarar que estos pensamientos están estrechamente relacionados entre sí, estos son: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Precisando en el pensamiento espacial, se resalta que "contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales" [13]. El desarrollo de este tipo de pensamiento permite al estudiante comprender el mundo que lo rodea, y ser capaz de resolver situaciones relacionadas con su entorno, por ejemplo, sobre ubicación, dirección y sentido.

Se involucran en el pensamiento espacial los sistemas geométricos, pues estos cumplen con los tres aspectos de todo sistema, que son los elementos, transformaciones y relaciones. Estos sistemas permiten que los estudiantes desarrollen habilidades mentales para reorganizar el espacio, esto con la ayuda de lápiz y papel o por medio del uso de software de geometría dinámica, facilitando los procesos de comprensión.

Cabe resaltar que la geometría no es solo el estudio de figuras, la geometría va más allá con la comprensión de cada objeto geométrico del entorno, así como con las relaciones que existen entre ellos para construir lo que conocemos, considerándola como una herramienta para resolver problemas [7]. En este sentido, a continuación se presentan las propuestas de algunos autores que dan pautas para abordar un problema.

2.1. ¿Cómo resolver un problema?

A lo largo de la historia se han realizado considerables aportes a la resolución de problemas matemáticos, entre los autores destacados en este campo se encuentra el matemático húngaro George Pólya, quien en su libro ¿Cómo plantear y resolver problemas?, publicado en 1965, propone las cuatro reglas de oro para la solución de problemas y como afirma Santos Trigo en [21], "son etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeña un papel importante".

La primera regla consiste en comprender el problema, es decir, que el estudiante logre interiorizar el problema en su totalidad, para ello debe leerlo y si es necesario releerlo para identificar los datos dados y el interrogante. Una vez comprendido el problema se prosigue con la segunda regla, que es concebir un plan, es decir, que el estudiante use de manera creativa sus conocimientos, habilidades y demás destrezas para proyectar un camino a seguir en la búsqueda de una solución. Luego como tercera regla se ejecuta el plan, aquí el estudiante debe tener claridad y seguridad en cada paso realizado. Finalmente, Pólya propone que como cuarta regla se realice una mirada retrospectiva, la cual consiste en revisar la solución del problema y ahondar en los detalles que se puedan mejorar para así lograr una mayor comprensión del mismo y en el caso de no obtener la solución, analizar que se puede cambiar para encontrar nuevas alternativas [17].

En este mismo campo el matemático español Miguel de Guzmán, quien basa sus ideas en Pólya, propone en [11] cuatro pasos para la solución de problemas. El primero es familiarizarse con el problema, para lograrlo se debe tratar de entender a detalle el problema, con paciencia y tranquilidad para perderle el miedo. El segundo es hacer una búsqueda de estrategias, entre las cuales propone empezar por lo más fácil, ensayar, realizar dibujos, figuras o esquemas, definir la notación, el lenguaje y buscar problemas semejantes o suponer que el problema está resuelto. El tercero, es llevar adelante la estrategia, es decir, seleccionar y ejecutar la mejor idea, perseverar en el desarrollo de la misma, si el camino se acaba buscar otro alternativo, y si se logra solucionarlo mirar a fondo los razonamientos realizados. Por último, Guzmán plantea que se debe revisar el proceso y sacar consecuencias de él, para ello se examina a fondo el camino que se siguió, ya sea que se haya logrado o no encontrar la solución, no obstante, se debe reflexionar sobre los procesos realizados para determinar si hay caminos más simples, hasta donde llega el método y el por qué y cómo funciona la solución planteada, es decir se debe realizar una metacognición y una metareflexión, es así como esta etapa es la más fructífera para quien resuelve un problema, ver [9].

Por otra parte, el matemático mexicano Luz Manuel Santos Trigo, basa sus ideas en el matemático norteamericano que hizo aportes considerables a la resolución de problemas Allan

Schoenfeld, compartiendo con él que hay elementos importantes que pueden guiar la resolución de un problema [21] y [23]. Para Santos Trigo se debe analizar el problema, donde se obtienen algunas pautas a seguir, como realizar un diagrama si es posible, examinar casos especiales y tratar de simplificar el problema. Luego del análisis se debe realizar la exploración, donde se pueden considerar problemas equivalentes al reemplazar algunas condiciones o recombinar elementos, también problemas modificados ligeramente, como descomponer el problema y trabajarlo por casos, por último plantea que en la verificación de la solución es necesario responder preguntas como: ¿se usaron todos los datos?, ¿la solución puede obtenerse de otro modo diferente?, ¿puede reducirse a resultados conocidos?, entre otras.

Los pasos que proponen estos autores, pueden servir de guía en el proceso de resolución, es decir, que se convierten en herramientas que ayuden a entender y resolver problemas, sin embargo, en ningún momento se espera que los estudiantes los mecanicen o los utilicen rígidamente [21].

Es importante resaltar que en esta propuesta se trabajará la resolución de problemas de tipo geométrico siguiendo los pasos que proponen estos autores y se busca fortalecer la resolución de problemas incluyendo un ambiente de geometría dinámica que ayudará en la comprensión de los problemas y en la búsqueda de soluciones.

2.2. Ambiente de geometría dinámica GeoGebra

Actualmente se reconoce que el uso de los AGD genera oportunidades para desarrollar conocimiento matemático, también permite transformar escenarios de enseñanza alrededor de la resolución de problemas. Como afirman Santos Trigo y Camacho en [21], "a partir del desarrollo notable de tecnologías digitales es necesario analizar qué tipo de problemas son importantes para que los estudiantes comprendan y construyan o desarrollen conocimiento matemático", es decir, que se deben seleccionar los problemas que sean más pertinentes para desarrollar en el aula con estos ambientes, logrando mejores resultados de aprendizaje. Entre los diferentes ambientes de geometría dinámica se encuentra GeoGebra que permite, según [18], la "formulación de conjeturas a partir de la información visual a través de la medición de la longitud de un segmento, la posición de un punto en el plano, la amplitud de un ángulo, el perímetro o área de un polígono, entre otros" proporcionando la posibilidad de plantear conexiones entre diferentes objetos geométrico, además, este software se puede descargar en el computador, tablet o celular sin ningún costo, también se puede trabajar en línea, ver los aportes de otros usuarios y compartir los propios.

Frente a las diversas ventajas de este software algunos autores se han pronunciado, por ejemplo, Del Pino en [8] destaca como algunas características principales que se puede usar tanto en Linux como en Windows, cuenta con diferentes vistas permitiendo integrar geometría 2D y 3D, aritmética, cálculo simbólico y cálculo estadístico y probabilístico, cuenta con una interfaz fácil de usar y es posible encontrar información sobre su aplicación. Por otra parte, Arteaga, Medina y Del Sol en [1] afirman que GeoGebra tiene las mismas ventajas de cualquier software educativo, pero sobresalen las siguientes: se puede realizar aprendizaje individual y grupal, promueve la construcción de nuevos conocimientos, la creatividad, la autonomía y la participación activa, además fortalece heurísticas tales como la inducción y la deducción.

Santos Trigo y Camacho afirman en [22], que "el desarrollo de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) como GeoGebra representa un avance significativo, dado que proporciona a los estudiantes herramientas para representar y explorar conceptos y problemas matemáticos", es decir que lleva a los estudiantes a comprender el problema y buscar estrategias para encontrar una posible solución, por ello es importante la inclusión de este tipo de programas en las aulas de clase y en la enseñanza virtual, no solo para motivarlos sino también para fortalecer las habilidades matemáticas.

Finalmente, dada la importancia del uso de un ambiente de geometría dinámica en la resolución de problemas, se propone una secuencia de enseñanza siguiendo la teoría de las situaciones didácticas que se presentará a continuación en la metodología.

3. Metodología

La estrategia didáctica que se propone fue diseñada teniendo en cuenta la teoría de las situaciones didácticas del investigador matemático francés y especialista en didáctica de las matemáticas Guy Brousseau, ver [2]. Esta teoría permite conocer cómo el estudiante construye su conocimiento y determinar los obstáculos que se presentan en su proceso de aprendizaje.

Las situaciones didácticas que propone Brousseau establecen una relación entre el estudiante, el profesor y el medio didáctico, a través de una situación de aprendizaje diseñada por el docente con el fin de desarrollar ciertos conocimientos por medio de actividades problematizadoras y facilitando un medio didáctico, ver [3]. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación didáctica es posible analizar la forma en que organiza sus ideas, la comprensión del tema y las estrategias utilizadas para resolver un problema [4]. También se plantea la situación a-didáctica, en esta "el docente plantea al estudiante un problema similar a los desarrollados para que lo resuelva con los conocimientos previamente adquiridos, es decir, que el estudiante estará en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente" [6], en este sentido, el docente toma un papel pasivo, pues no resuelve el problema sino que guía al estudiante para que él explore diferentes caminos y encuentre la solución y es importante garantizar que el problema se solucione con el concepto que se pretende enseñar.

La teoría de las situaciones didácticas se divide en cuatro tipos de situaciones que son acción, formulación, validación e institucionalización. En la situación acción, el estudiante debe desarrollar de manera individual un problema, aplicando sus conocimientos previos y así obtener un determinado saber mediante la implementación de estrategias. Adicionalmente, la situación de formulación, consiste en trabajar en grupo, para ello es necesario que los estudiantes compartan sus experiencias en la construcción del conocimiento. Por otro lado, la situación de validación, consiste en verificar las estrategias usadas en la solución de la actividad, en esta etapa se pueden presentar las justificaciones o razones por las cuales son válidos los procesos realizados. Finalmente, la institucionalización del saber, es una etapa de confirmación del saber construido por los estudiantes en etapas anteriores, también el docente realiza observaciones donde hubo mayor dificultad. Esta etapa representa el cierre de una situación didáctica.

La estrategia que se presenta a continuación, usa como medio didáctico la resolución de problemas y el AGD GeoGebra, donde se describe cada etapa de las situaciones didácticas en el proceso de la resolución de los problemas presentados, así como la integración de GeoGebra y el aporte que tiene en estos.

4. Propuesta

GeoGebra online es un programa que permite a los docentes enseñar geometría de una manera más dinámica para los estudiantes, puesto que cuenta con varias opciones para interactuar con ellos. Este entorno virtual es muy similar a la versión que se trabaja cuando se descarga el programa, sin embargo, presenta otras opciones que permiten sacar un mayor provecho de GeoGebra, como la herramienta Classroom donde el docente puede observar en tiempo real lo que hace el estudiante, evaluar los procesos que realiza y aportar en el desarrollo de los mismos cuando lo requiere.

Para trabajar en GeoGebra virtual el docente debe iniciar creando su cuenta o perfil, la cual le permite crear, diseñar y compartir actividades, que en este entorno se denominan recursos, en ellos se pueden agregar imágenes, videos, texto, enlaces, archivos PDF, applets de GeoGebra que son construcciones creadas con en el mismo entorno y que los estudiantes pueden manipular, también es posible acceder y compartir los recursos creados y publicados por otros docentes en cualquier momento. Es importante resaltar que esta opción es interesante debido a que se pueden encontrar publicaciones de personas de diferentes países, incluso el docente tiene la posibilidad de crear grupos, estos pueden ser colaborativos con colegas de trabajo o aulas virtuales para estudiantes.

En los espacios colaborativos es posible trabajar en equipo, compartir, coleccionar y crear materiales con colegas, comunicándose a través de publicaciones y comentarios. Por otro lado, en las aulas virtuales el docente puede plantear tareas, realizar retroalimentaciones y conservar un registro del trabajo de cada estudiante. Además, permite promover la colaboración, compartir materiales y descubrimientos matemáticos entre el docente y sus estudiantes, y es posible usarlas como una plataforma de aprendizaje en línea que apoya a los cambios educativos que se han dado en los últimos tiempos [10].

En el entorno de GeoGebra se usó la herramienta libro para crear una secuencia con diversas actividades, ver Figura 1, en ella se incluyeron secciones que, dada la organización del entorno, se llamaron capítulos, entre estos se tiene definición y clasificación de ángulos, definición y clasificación de polígonos y aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas, como se muestra en la imagen.

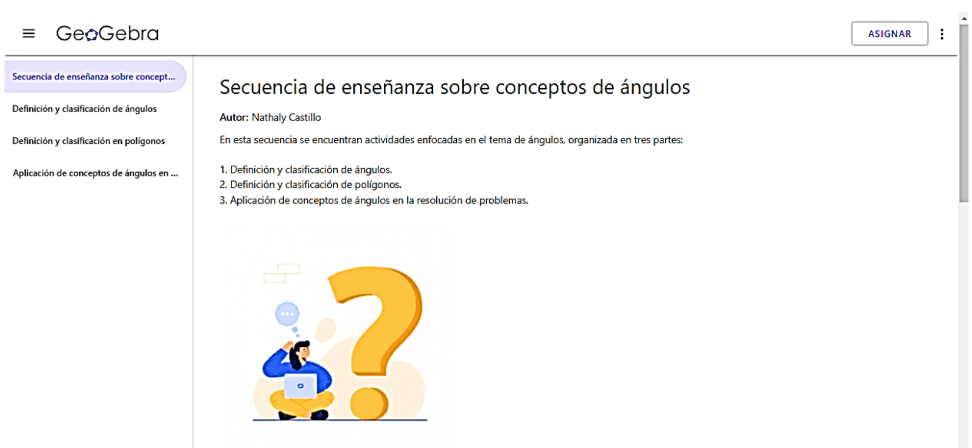

Figura 1: Secuencia de enseñanza en GeoGebra online.

Es importante mencionar que en este artículo se presentan algunos de los problemas que se encuentran en la secuencia, en los cuales se resalta como GeoGebra permite al docente organizar su clase de una manera más dinámica aportando en los procesos de enseñanza y al estudiante a través de la exploración determinar invariantes que lo lleve a generalizar y a realizar un análisis profundo de los procesos.
En la sección de definición y clasificación de ángulos (ver Figura 2), se pueden observar las subsecciones: puerta oscilante, definición de ángulo y clasificación de ángulos. Aquí se destaca que el docente tiene la posibilidad de presentar conceptos y crear actividades con videos, imágenes, applets, entre otros.

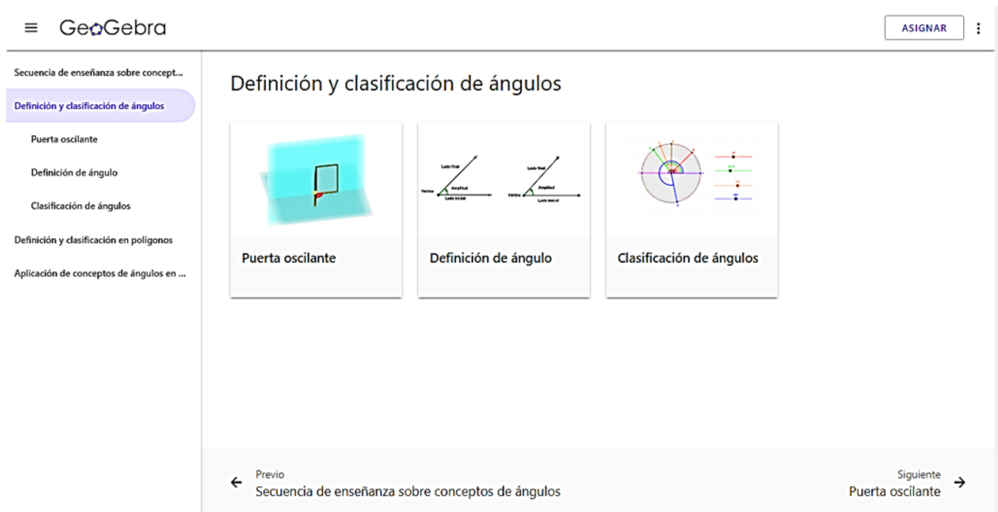

Figura 2: Secciones del capítulo ángulos.

En la subsección de clasificación de ángulos, por ejemplo, se creó una lección con las tareas que contiene, para ello se genera un código el cual los estudiantes deben ingresar en GeoGebra Classroom. Es importante resaltar que los estudiantes no necesitan una cuenta en la plataforma, adicionalmente, si el docente lo desea, puede exportar la actividad a Google Classroom. Una vez creada la lección los estudiantes ingresan al entorno de GeoGebra con el código y su nombre (ver Figura 3) donde pueden observar y desarrollar las actividades propuestas.
Por otro lado, el docente desde su dispositivo puede ingresar a la lección y observar el trabajo de los estudiantes en tiempo real (ver Figura 4), lo cual le permite realizar aportes adicionales a sus estudiantes o incluso ajustar la actividad si es necesario.

A continuación se presentan tres problemas resueltos que se encuentran en la secuencia, en los cuales se tiene en cuenta la teoría de las situaciones didácticas y las etapas para resolver un problema.

El primer ejemplo es tomado de la Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, nivel básico, prueba clasificatoria año 2010, en el cual se busca movilizar la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo y el uso de la clasificación de los ángulos según la suma de sus medidas, ver [16].

Enunciado: En la Figura 5 la medida del ángulo X es: ______

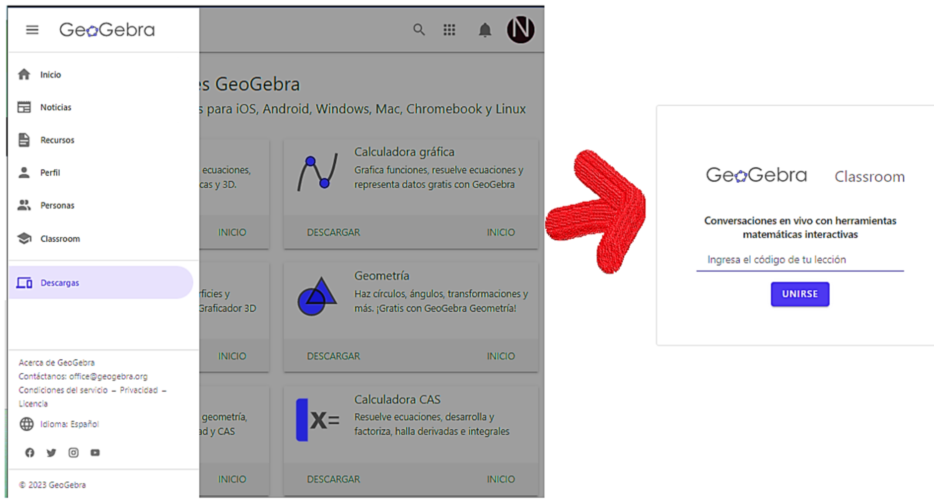

Figura 3: GeoGebra Classroom.

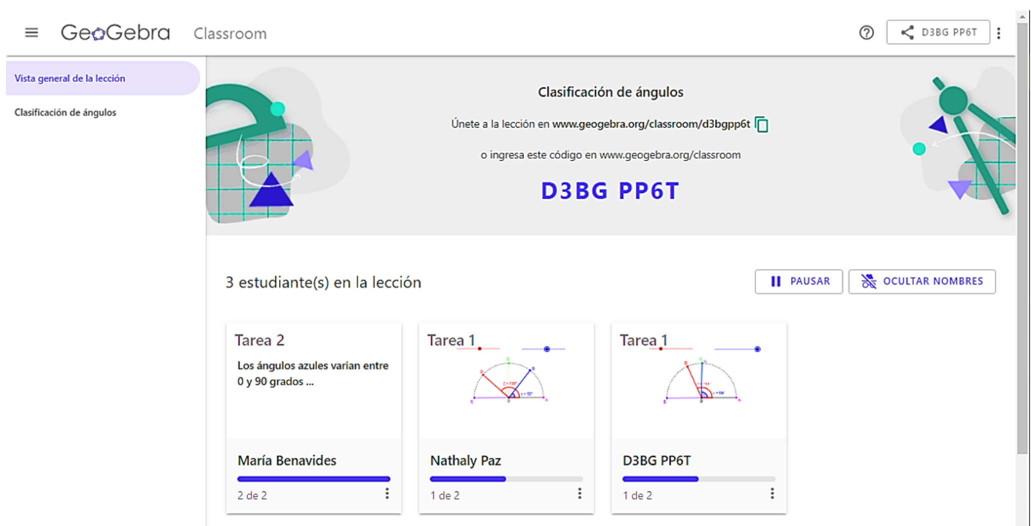

Figura 4: Vista general de los estudiantes que realizan la actividad.

Para comenzar se propone una situación acción donde el estudiante puede manipular un applet de GeoGebra que se ha construido teniendo en cuenta las condiciones dadas en el problema (ver Figura 6). Es importante notar que la figura construida no depende de la posición de los puntos. Por ejemplo la Figura 6 se rotó hacia la izquierda en comparación a la que aparece en el problema, esto con el fin de llevar al estudiante a observar que aunque la figura se rote sus propiedades y condiciones no cambian, de esta manera el problema en esencia es el mismo. Además, mediante la exploración y el uso de las herramientas como medir ángulos, arrastre y suma puede verificar que aunque la figura cambie de tamaño si los ángulos se mantienen, la medida del ángulo buscado es la misma.

Además, siguiendo los pasos para resolver un problema, se proponen algunas preguntas orientadoras con las cuales se espera que el estudiante logre idear un plan para resolver el problema:

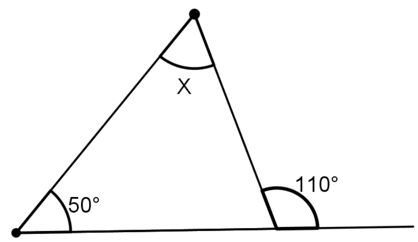

Figura 5: Imagen del problema ORM-UIS 2010.

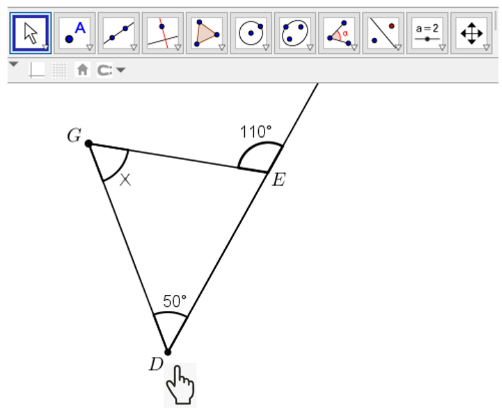

Figura 6: Construcción en Geogebra del problema ORM-UIS 2010.

- ¿Qué tipo de ángulos son el $\angle GDE$ y el que mide 110°?
- ¿Cuál sería la suma de la medida de los dos ángulos anteriores?
- Con la conclusión anterior ¿qué operación se pueden realizar para determinar el ángulo $\angle GED$?
- Una vez encontrada la medida del ángulo GED, recuerda ¿cuánto suma la medida de los ángulos internos de un triángulo?
- Si de los tres ángulos internos del triángulo ya se conoce dos, ¿qué operación se debe realizar para encontrar el tercero?

Con el plan que el estudiante logre diseñar al responder las preguntas orientadoras, debe ejecutar ese plan para ver si lo conduce a una posible solución.

Luego, se organizan grupos para pasar a la situación de formulación, en la cual los estudiantes con la manipulación del applet de GeoGebra y las preguntas orientadoras, pueden realizar una actividad que se denominó foro del conocimiento, donde ellos comparten su posible solución del problema con el grupo.

Después, se pasa a la situación de validación donde los estudiantes hacen un análisis de lo que se ha realizado en las situaciones anteriores y determinan si los procesos ejecutados logran dar solución al problema, es decir, se realiza una mirada retrospectiva con la cual se puede ver si es posible otra forma de solucionar el problema. Además, sino se logró llegar a la solución, se debe revisar el proceso para analizar qué se puede cambiar o mejorar. Incluso se puede repensar las condiciones del problema para que sea más sencillo o partir a crear uno nuevo.

Finalmente, el docente es quien realiza la institucionalización del saber construido por los estudiantes en las situaciones desarrolladas, para ello presenta una posible solución del problema, como la siguiente:

Observa que el ángulo $\angle GED$ es adyacente al ángulo de medida $110°$, por lo tanto, la suma de las medidas de estos dos ángulos es $180°$, entonces para encontrar la medida del ángulo $\angle GED$ se debe realizar la siguiente resta $180° - 110° = 70°$, así $\angle GED = 70°$. Luego, se suman los ángulos $\angle GDE$ y $\angle EDG$, así $50° + 70° = 120°$ y dado que la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, entonces se resta la medida de estos ángulos a 180 para encontrar el ángulo buscado, de la siguiente manera $180° - 120° = 60°$, por lo tanto se concluye que $\angle DGE = 60°$.

Con lo anterior se realiza el cierre de la situación didáctica, en la que se desarrollaron cada una de las situaciones que la componen y los pasos para resolver un problema. Adicionalmente, este problema y la manipulación del applet en GeoGebra permite llevar al estudiante a verificar que la suma de la medida de los ángulos internos de un triangulo es $180°$ independientemente de su tamanño o pocisión.

Por otro lado, en el desarrollo de este problema se intento dar la mayor cantidad de ayudas, de manera que el estudiante logre llegar a la solución correcta, esto debido a que si se deja al estudiante solo en un primer intento puede sentir fustración o que es muy difícil y por tanto no lo vuelva a intentar. Por ello a medida que avance en la resolución de problemas se puede dar mayor autonomía pues tendrá confianza en sí mismo.

El segundo problema es tomado de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato, del primer selectivo del año 2020, en este caso se pretende movilizar la propiedad de ángulos internos en un cuadrilátero, ver [15].

Enunciado: En la figura $ABCD$ es un cuadrilátero de área 5. Si los cuatro círculos tienen radio 1 y centro en los vértices del cuadrilátero, ¿cuánto mide el área sombreada? (ver Figura 7).

Para iniciar a resolver el problema se propone una situación acción, que consiste en que el estudiante realice una construcción en GeoGebra, por ello se recomienda presentar la applet con las herramientas habilitadas, en la cual pueda crear y mover el cuadrilátero y las circunferencias, además con ayuda del programa formular una idea de una posible solución. Se aclara que en este caso se gíua a realizar una construcción que ilustre la situación planteada más no cumple con todas condiciones dadas en el problema.

Para guiar al estudiante se realizan algunas preguntas orientadoras como:

- ¿Qué es un cuadrilátero?
- ¿Qué elementos componen un cuadrilátero?
- Revisa las herramientas del programa y define ¿cuáles pueden ser útiles para construir el cuadrilátero?
- ¿Será posible crear el cuadrilátero uniendo segmentos?

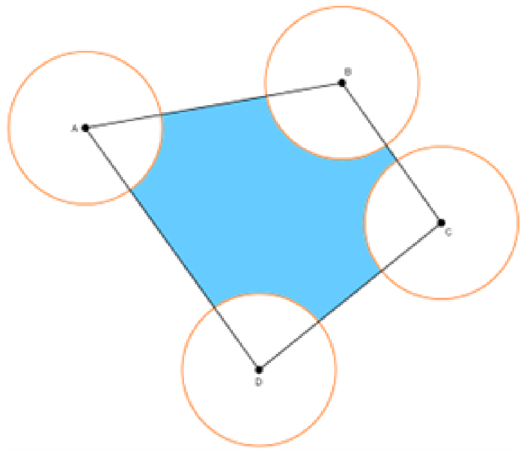

Figura 7: Figura del problema de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

- ¿Hay otra herramienta que consideres más pertinente para realizarlo?
- ¿Cuáles son los elementos que componen un círculo?
- ¿Qué herramienta se puede usar para construir los círculos?
- ¿Qué es lo que se desea encontrar?
- ¿Qué pasa con los ángulos internos del cuadrilátero?
- Teniendo en cuenta un radio de la circunferencia, ¿cuántos grados mide una vuelta hasta llegar al mismo radio?
- ¿Qué relación hay entre los ángulos internos del cuadrilátero y la circunferencia?
- ¿Para qué se usa el radio del círculo?
- ¿Qué proceso se puede realizar para encontrar el área solicitada?

Es importante resaltar que se busca la independencia del estudiante cuando se enfrenta a los problemas, por ello, a medida que se avanza, no se dan tantos detalles en la solución para que él comience a aplicar sus conocimientos y buscar relaciones que aporten en un posible camino a la solución. Posteriormente, se solicita realizar los procesos que considere pertinentes para la solución del problema y se formen equipos para llevar a cabo la situación de formulación, participando del foro del conocimiento. En dicho equipo cada integrante tendrá la oportunidad de comentar su solución y plantear una relación entre los objetos geométricos presentes en el problema.

Luego, se continúa con la situación de validación para que los estudiantes analicen si los procesos ejecutados llevan a la solución correcta del problema, o si es necesario replantearla o buscar otra alternativa.

Finalmente, el docente presenta una construcción que permite identificar la realción entre los ángulos, los sectores circulares y el área del cuadrilátero, resaltando que los ángulos en el cuadrilátero suman $360°$, por tanto los sectores circulares corresponden al área de un círculo completo, es así como para dar solución al problema se debe calcular el área del círculo y restarla con el área total del cuadrilátero.

Se comienza calculando el área del círculo de radio 1, para ello se usa la expresión:

$$A_c = \pi r^2.$$

Reemplazando el valor del radio se obtiene que el área es $A_c = \pi$. Ahora, al área total del cuadrilátero se resta el área del círculo. Es decir

$$A_s = 5 - \pi,$$

lo cual corresponde a la respuesta del problema.

El docente además, puede hacer notar que este problema se puede generalizar para cualquier área del cuadrilátero y cualquier radio de la circunferencia siempre y cuando estas no se sobrepongan, de esta manera se motiva a los estudiantes a que cuando resuelvan un problema hagan un análisis más profundo de las condiciones y variaciones que se puedan hacer del mismo.

Por otro lado, se debe tener en cuenta que el uso de GeoGebra no siempre es para que el estudiante encuentre una solución numérica inmediata al hacer una construcción con las condiciones dadas del problema porque en algunas ocasiones es necesario tener mayor conocimiento teórico y de las herramientas del programa, así lo que se busca es fortalecer la visualización y el análisis de las relaciones entre los elementos a pesar de que algunas condiciones no se cumplen, por ejemplo en el problema anterior es complicado que se construya un cuadrilátero general con el área dada en el problema, sin embargo, si es posible determinar la relación entre los círculos y el área.

El tercer problema es tomado de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño, nivel 1, primera fase, año 2016, en este problema se busca que el estudiante aplique la medida de ángulos en polígonos regulares, ver [5].

Enunciado: $ABCDE$ es un pentágono regular, CDF es un triángulo equilátero y $CFGH$ es un cuadrado (ver Figura 8). ¿Cuál es la medida en grados del ángulo BCH?

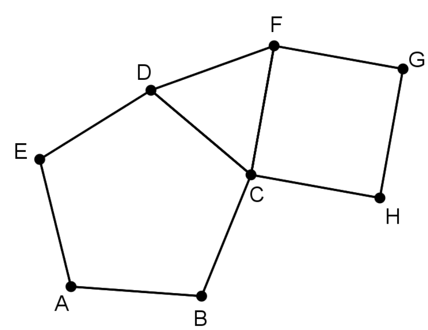

Figura 8: Figura del problema de la ORMUDENAR.

En este problema se propone una situación acción que facilita el uso del applet de GeoGebra con las herramientas de geometría, para que los estudiantes intenten realizar la contrucción para poder interactuar con ella, pues la imagen ya está dada en el enunciado del problema. Así se sugiere usar la herramienta polígono regular, puesto que esta facilita la elaboración del gráfico, en este caso se debe construir un segmento que será la base de la construcción y con este podrán manipularla para determinar las invarianzas.

Para guiar a los estudiantes se proponen las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué característica cumplen los ángulos de un polígono regular?
- ¿Cómo se puede encontrar la medida de los ángulos de un polígono regular?
- ¿Qué relación existe entre los ángulos que tienen como vértice al punto C?
- ¿Cuál sería la estrategia para encontrar el valor del ángulo solicitado?

Se procede a formar equipos para que cada estudiante pueda compartir con su grupo la solución que cree es la correcta o también aquellas relaciones que logŕo encontrar, desarrollando así la situación de formulación.

Luego, en la situación de validación se da un espacio para que los estudiantes analicen si la o las soluciones planteadas son correctas o si por el contrario es necesario repensarlas nuevamente.

Finalmente, para la institucionalización del saber el docente puede indicarle a los estudiantes una forma de realizar la construcción en GeoGebra y hacerles notar que la medida de los ángulos internos de los polígonos regulares no cambia así el tamaño cambie. Además, una solución posible es teniendo en cuenta, por un lado, que los ángulos internos de un triángulo, un cuadrado y un pentágono equilátero miden respectivamente $60°$, $90°$ y $108°$, po otro lado, se debe observar que la medida de los ángulos formados en C suman $360°$, que es un ángulo de giro, por ello para terminar se debe restar de $360°$ los ángulos anteriores, es decir, $360° - 60° - 90° - 108° = 102°$, por ello la medida del ángulo buscado es $102°$.

Cabe resaltar que este problema le permite al docente llevar al estudiante más allá en sus conocimientos, puesto que si ellos son curiosos pueden darse cuenta que es posible determinar la medida de los ángulos internos de un polígono regular sin necesidad de conocer la fórmula, basta con saber que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$ y que todos los ángulos internos en un polígono regular tienen igual medida. Por ejemplo, un cuadrilátero se puede dividir en dos triángulos trazando una de sus diagonales, de esta manera se obtienen dos triángulos y como los ángulos internos en el triángulos suman $180°$ entonces los del cuadrilátero suman dos veces este valor, es decir, $180° \times 2 = 360°$ y como un cuadrilátero tiene cuatro lados se divide entre cuatro, dando como resultado que cada ángulo en un cuadrilátero regular, que en este caso particular es el cuadrado, mide $90°$. De la misma manera se puede hacer con el pentágono formando tres triángulos que no se sobrepongan con tres de sus las diagonales, a continuación en la Figura 9 se ilustra esta situación.

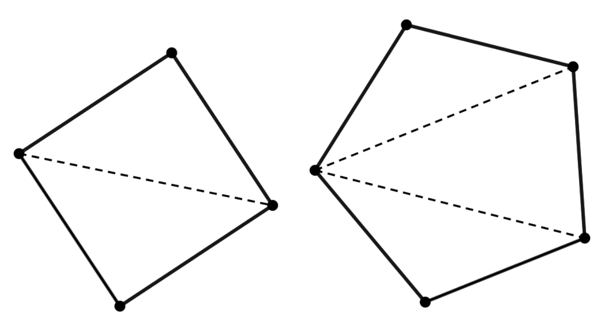

Figura 9: Polígonos divididos en triángulos.

De esta manera se puede enseñarle al estudiante que cuando se enfrente a un problema no es necesario que tenga todos los conceptos y fórmulas mecanizadas o memorizadas, puesto que puede encontrarlas.

Es importante que el docente resuelva otros problemas similares donde se pueda usar las propiedades y conceptos que se quiere enseñar, por otro lado es necesario que, como ya se mencionó, a medida que se avanza en la solución de los problemas el docente genere autonomía, confianza e independencia en los estudiantes con el fin de que ellos logren desarrollar solos los problemas.

Finalmente, se comparte el enlace de la secuencia diseñada en GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/mftkjwbt, en la cual no solo se encuentran los problemas resueltos en este artículo, sino algunos conceptos de geometría relacionados a ángulos y polígonos con actividades dinámicas para trabajar con los estudiantes y también otros problemas tomados de olimpiadas matemáticas que permiten reforzar estos conceptos.

5. Conclusiones

La resolución de problemas y la integración de un ambiente de geometría dinámica permite la inclusión de la geometría de forma creativa al aula de clase y es llamativa para los estudiantes desarrollando en ellos habilidades y destrezas, que serán de utilidad tanto en el contexto académico y específico en matemáticas como en su contexto social.

Estos ambientes dinámicos brindan a los docentes herramientas para afrontar los cambios que se presentan en los proceso educativos a causa de las diferentes situaciones sociales y de los avances tecnológicos, es así como los docentes se han visto en la necesidad de salir de la zona de confort, explorar y aprender otras metodologías que les ayuden a cualificar sus procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clases.

La enseñanza con un AGD como GeoGebra, permite mejorar en los estudiantes la visualización y comprensión de las relaciones entre elementos geométricos, sin embargo, es importante resaltar que los métodos de la educación tradicional no se deberían perder, dado que permiten mantener la rigurosidad de la disciplina en las demostraciones y fortalecer la capacidad argumentativa.

Es importante resaltar que el uso de GeoGebra permite al docente preparar de forma diferente y llamativa sus clases, donde el estudiante tiene un papel activo frente a la cosntrucción de su conocimiento, pues necesita realizar un proceso de argumentación para socializar con sus compañeros. Además, puede verificar que se cumplen las propiedades que el docente le enseña convirtiéndose en un conocimiento más significativo, ya que se basa en la exploración, práctica y experiencia mediante el uso apropiado de las herramientas que brinda el programa.

6. Agradecimientos

Este artículo hace parte del proyecto de investigación *Aplicación de conceptos de ángulos en la resolución de problemas integrando el ambiente de geometría dinámica GeoGebra* realizado en la maestría en educación de la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Arteaga, E., Medina, J, y del Sol, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado,* 15 (70), 102-108. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=es 16

[2] Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: didáctico/didactic to algebra study* (Vol. 7). Libros del Zorzal. 17

[3] Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en didactique des mathematiques,* 7(2), 33-115. 17

[4] Briceño Solís, E. C., y Alamillo Sánchez, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH,* 8(15), 111-131. 17

[5] Castillo, J. y Rúa, C. (2018). *Resolución de problemas, un medio para la formación matemática.* Pasto, Colombia: Graficolor Pasto SAS. 14, 24

[6] Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. Cuadernos, 2, 1-10. 17

[7] Cifuentes, N. y Rojas, M. (2018). *Resolución de Problemas de tipo geométrico en olimpiadas matemáticas* (tesis de pregrado). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. 15

[8] Del Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Revista de Didáctica de la Estadística,* 2, 243-250. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770290 16

[9] Gaspar, J; Paitan, B (2021). *El modelo de Miguel de Guzman y la resolución de problemas en estudiantes de la I.E "Cesar Vallejo Mendoza" Pumaranra, Acobamba. Universidad Nacional de Huancavelica* (tesis de pregrado). Recuperado de https://repositorio.unh.edu.pe/bitstreams/f3024827-a345-45af-8c23-7fd25ad034dc/download 15

[10] GeoGebra. (2023). ¿Qué es GeoGebra? https://www.geogebra.org/about?lang=es 13, 18

[11] Guzmán, M de. (1995). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid, España: Ediciones Pirámide S.A. 15

[12] Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. posibilidades y complejidad. *Revista Sigma,* 10 (2), 10 a 26. 13

[13] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias, en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia. 14

[14] Muñoz, J. y Mato, M. (2008). Análisis de las actitudes respecto a las matemáticas en alumnos de ESO. *Revista de Investigación Educativa,* 26 (1), 209 226. https://revistas.um.es/rie/article/view/94181 13

[15] Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato. (2023). https://ommgto.cimat.mx/Inicio_OMMGto 22

[16] Olimpiadas Regionales de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. (2011). http://matematicas.uis.edu.co/?q=olimpiadas 19

[17] Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas?.* México D.F, México: Trillas. 15

[18] Poveda, W. (2020). Resolução de problemas no GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo,* v. 9, n. 1, p. 26-42, 2020 - ISSN 2237-9657. 16

[19] Sánchez, C. (2020). Herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas durante la pandemia COVID-19. *Revista cuatrimestral de divulgación científica UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS.* Vol. 7 (2). Mayo-agosto. Hamutay 2020. Lima-Perú. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7972743 13

[20] Santos Trigo, L. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en educación matemática XII* (p. 8). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. 13

[21] Santos Trigo, L. y Camacho, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos.* México D.F, México: segunda edición, Trillas. 15, 16

[22] Santos Trigo, M. y Camacho, M. (2018). *Resolución de Problemas Matemáticos y el Uso de Tecnología Digital en el Diseño de Libros Interactivos.*La Educatio Siglo XXI, Vol. 36 No 3. 2018, pp. 21-40. 16

[23] Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, Estados Unidos: Academic press. 16

[24] Vargas, G; Gamboa R (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia,* vol. 27, núm. 1, enero junio, 2013, pp. 74-94 Universidad Nacional Heredia, Costa Rica. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/4759/475947762005.pdf 13