Mosquera López, Saulo, Soto Ágreda, Oscar Fernando 2023. El teorema de Thébault y resultados relacionados. Revista Sigma, 19(2). Páginas. 1-11

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XIX № 2 (2023), páginas 1–11

El teorema de Thébault y resultados relacionados

Mosquera López, Saulo [1]
Soto Ágreda, Oscar Fernando [2]

Abstract: The parallelogram is an elementary geometric figure that is studied in basic and secondary education, however, this geometric object has properties that are not usually treated at these educational levels, Thébault's theorem and Dao Thanh Oai's theorem are examples of these. properties despite the fact that they are based on simple and elementary foundations. The purpose of this article is to illustrate, using GeoGebra, these results, as well as other relationships that have been observed through exploration, experimentation, and visualization and have not been "found" in the literature on the matter.

Keywords. parallelogram, quadrilateral, square, centroid,metric relations, GeoGebra.

Resumen: El paralelogramo es una figura geométrica elemental que se estudia en la enseñanza básica y media, sin embargo, este objeto geométrico posee propiedades que no se suelen tratar en estos niveles educativos, el teorema de Thébault y el teorema de Dao Thanh Oai son ejemplos de estas propiedades a pesar de que se sustentan sobre cimientes simples y elementales. El propósito de este artículo es ilustrar, utilizando GeoGebra, estos resultados, así como otras relaciones que se han observado a través de la exploración, experimentación y visualización y no hemos "encontrado" en la literatura al respecto.

Palabras Clave. paralelogramo, cuadrilátero, cuadrado, centroide, relaciones métricas, GeoGebra.

1. Introducción

"Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones", es uno de los argumentos que se promueven en los lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), sección de Referentes Curriculares, para impulsar una novedosa visión de las matemáticas escolares; en este sentido promover el desarrollo del pensamiento espacial y métrico es un espacio adecuado para su fomento y aplicación, recurriendo para ello a la geometría.

En la enseñanza básica y media, es usual tratar, el paralelogramo y algunas de sus relaciones básicas, sin embargo, resultados tales como el teorema de Thébault, (1937) *"Si sobre los lados de un paralelogramo se construyen exteriormente (interiormente) cuadrados, los centroides de los cuadrados construidos forman un nuevo cuadrado"* no son considerados. Una modificación de este resultado fue reportada por Dao Thanh Oai en el año 2015, *"Si sobre los lados de un paralelogramo se construyen*

[1]MSc en Matemáticas, Universidad del Valle, Profesor Pensionado Universidad de Nariño. Correspondencia: Urb. Sumatambo Manzana 19 Casa 5A. Email: samolo@udenar.edu.co

[2]MSc en Enseñanza Problémica, Universidad del Jorge Tadeo Lozano, Profesor Universidad de Nariño. Correspondencia: Terrazas de Pinasaco 1 casa 5b Email: fsoto@udenar.edu.co

cuadrados externos y se prolongan los lados del paralelogramo de manera que intercepten a las rectas que unen los centros de los cuadrados, entonces, los puntos de intersección de estas rectas forman un cuadrado". El objetivo central de este artículo, además de ilustrar los resultados anteriores, es el de utilizar GeoGebra para que a través de la exploración, visualización y experimentación se promuevan preguntas tales como: ¿Existe alguna relación entre las áreas del paralelogramo y las de los cuadrados construidos a partir de los centroides?, ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados construidos a partir de los centroides y la de los cuadrados construidos a partir de los lados? ¿qué sucede en, el teorema de Dao Thanh Oai, si los cuadrados se construyen interiormente?, ¿la relación métrica que se observa en el teorema de Thébault, se conserva en el teorema de Dao Thanh Oai?.

2. El teorema de Thebault.

En geometría euclidiana es posible encontrar resultados cuyos enunciados no son sencillos de comprender, no únicamente por los elementos geométricos involucrados en el mismo sino, además, por la cantidad de información geométrica que los relaciona, por ejemplo, *"El punto medio de la terna de los círculos de Jhonson está sobre el círculo de Lester del triángulo medial del triángulo de contacto"* (Grozdev, 2016).

Sin embargo, existen otros resultados, que sorprenden por la sencillez de su enunciado y por la facilidad de comprensión de los mismos, en nuestra opinión, el teorema de Napoleón (1825), es uno de ellos, *"Si sobre los lados de un triángulo se construyen externamente triángulos equiláteros, el triángulo formado por los baricentros de estos triángulos es equilátero"*. La gráfica 1, ilustra este teorema y una demostración del mismo puede revisarse, por ejemplo, en [1] o en [3]. Ante este resultado inmediatamente surge la inquietud sobre, si el teorema persiste cuando los triángulos equiláteros no se construyen de manera externa sino en de modo interno y, por ejemplo, buscar relaciones entre los objetos geométricos inicial y final en cuanto a sus áreas y perímetros. Interrogantes que permiten motivar el estudio de la geometría pura o sintética.

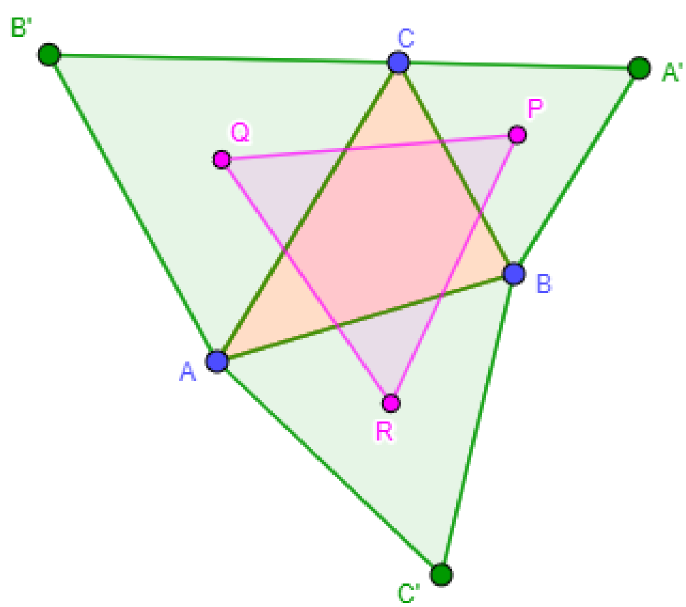


Figura 1: El teorema de Napoleón.

¿Qué sucede si en lugar de un triángulo se considera un cuadrilátero? Y de hecho, ¿por afinidad, si en lugar de triángulos equiláteros se construyen por analogía, cuadrados?

La respuesta se encuentra en el teorema de Van Aubel (1878), *"Si se construyen, exteriormente, cuadrados sobre los lados de un cuadrilátero convexo, los segmentos que unen los centros de los cuadrados construidos sobre lados opuestos son perpendiculares y tienen la misma longitud"*. La gráfica 2 ilustra este resultado y una demostración del mismo se puede encontrar, por ejemplo, en [6].

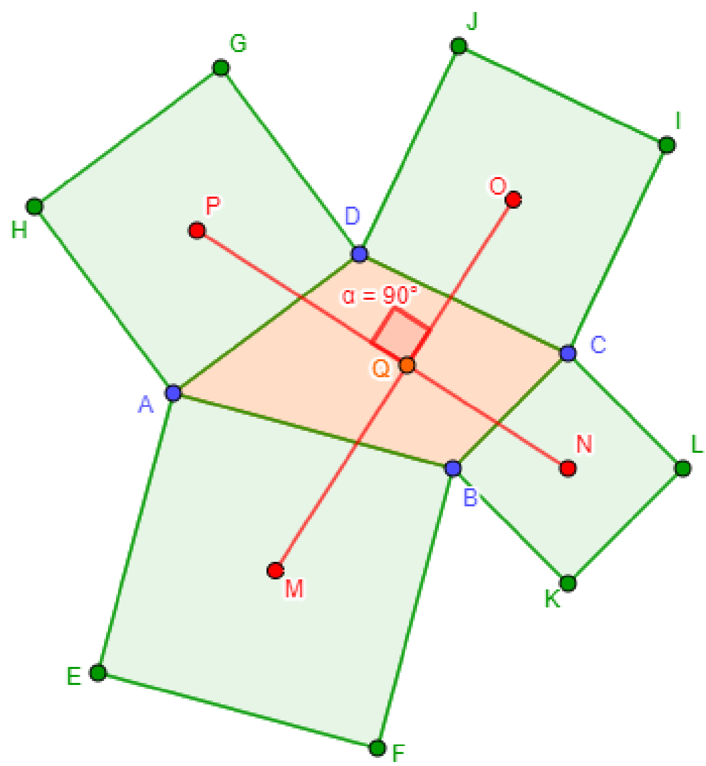


Figura 2: El teorema de Van Aubel.

3. El teorema de Van Aubel y el de Thébault

Si se observa con detenimiento la gráfica 3 es posible inferir que el cuadrilátero determinado por los centros de los cuadrados no es un cuadrado.

Consecuente con lo anterior, es lícito preguntarse. ¿bajo qué condiciones, en el teorema de Van Aubel, este cuadrilátero es un cuadrado? La respuesta a este interrogante se conoce como, el teorema de Thébault (1937), que reza *"Si sobre los lados de un paralelogramo se construyen exteriormente (interiormente) cuadrados, los centroides de los cuadrados construidos forman un nuevo cuadrado"*. La gráfica 4, ilustra este resultado.

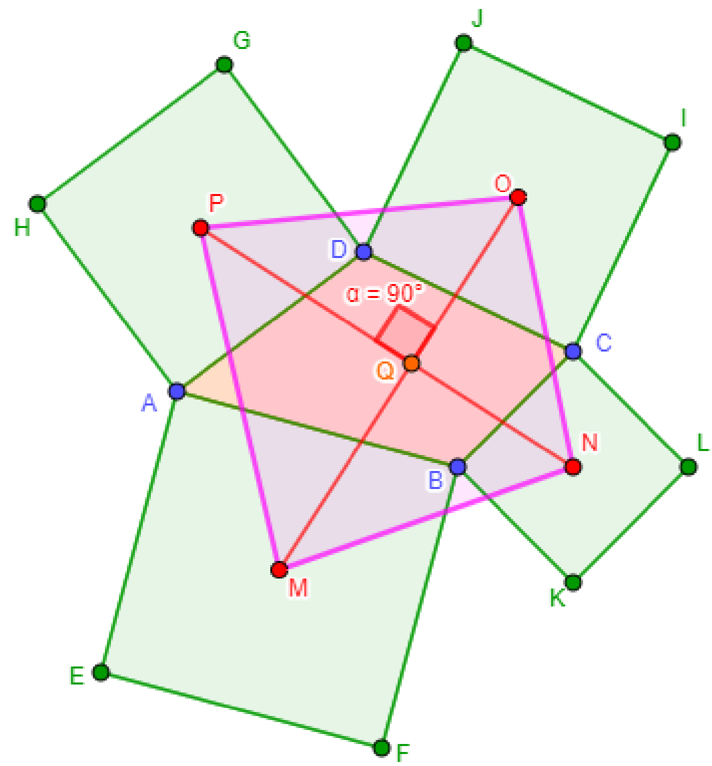


Figura 3: El cuadrilátero determinado por los centros en el teorema de Van Aubel.

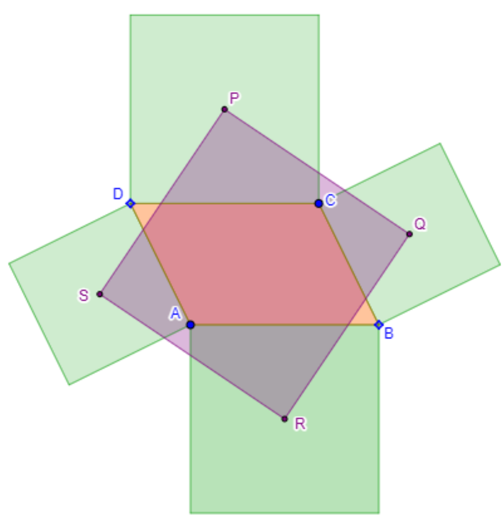


Figura 4: El teorema de Thébault externo.

3.1. Dos relaciones métricas

Si se utiliza un software de geometría dinámica, por ejemplo, GeoGebra o Cabrí, es posible desarrollar construcciones que permiten la manipulación de los objetos libres y que por tanto posibilitan el análisis de ciertas preguntas que se pueden formular al respecto de las ilustraciones de resultados geométricos. En el caso del teorema de Thébault, estamos interesados, en utilizar GeoGebra, para estudiar la existencia de relaciones métricas entre las áreas de los polígonos involucrados en la construcción.

Pregunta 1: ¿Existe alguna relación entre las áreas del paralelogramo y las de los cuadrados construidos a partir de los centroides?

En la gráfica 5, $ABCD$ es el paralelogramo inicial, $PQRS$ es el cuadrado determinado por los centroides de los cuadrados construidos exteriormente y $TUVW$ es el cuadrado determinado por los centroides de los cuadrados construidos interiormente.

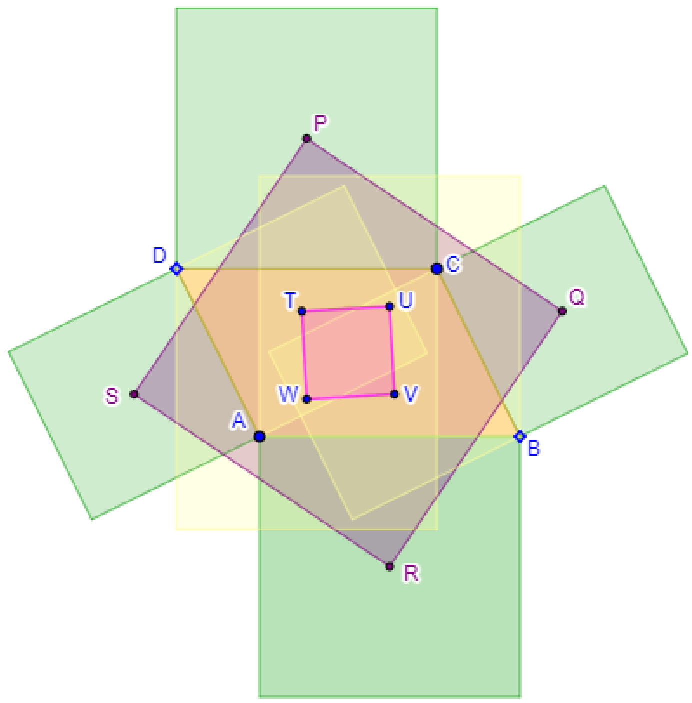


Figura 5: El teorema de Thébault interior y exterior.

Aunque aún no tenemos una demostración formal del resultado que se obtuvo, la experimentación, manipulación y visualización permitió concluir que: *"La diferencia de las áreas entre los cuadrados construidos a partir de los centroides, exterior e interiormente, es el doble del área del paralelogramo inicial"*. La gráfica 6, ilustra esta observación.

Pregunta 2: ¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados construidos a partir de los centroides y la de dos cuadrados diferentes construidos sobre los lados?

En la gráfica 7, $ABCD$ es el paralelogramo inicial, $PQRS$ es el cuadrado determinado por los centroides de los cuadrados construidos exteriormente, $TUVW$ es el cuadrado determinado por los centroides de los cuadrados construidos interiormente, $ABLM$ es un cuadrado construido sobre un lado del paralelogramo hacia el exterior y ADC_1B_1 es un cuadrado construido sobre otro lado del paralelogramo hacia el interior.

Así como en el caso anterior, no hemos logrado una demostración del resultado obtenido, sin embargo, la experimentación, manipulación y visualización permitió concluir que: *"La suma de las áreas*

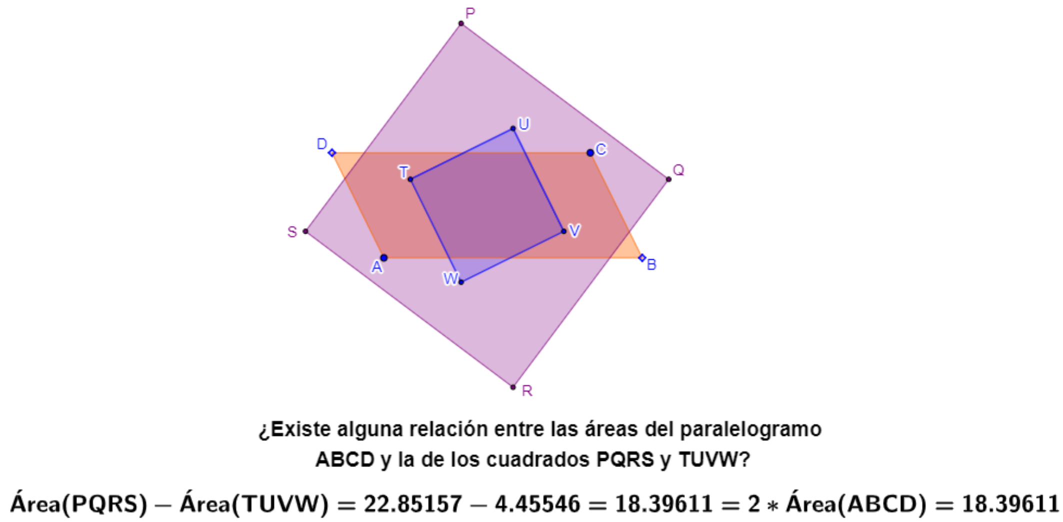


Figura 6: Una ilustración de la observación 1.

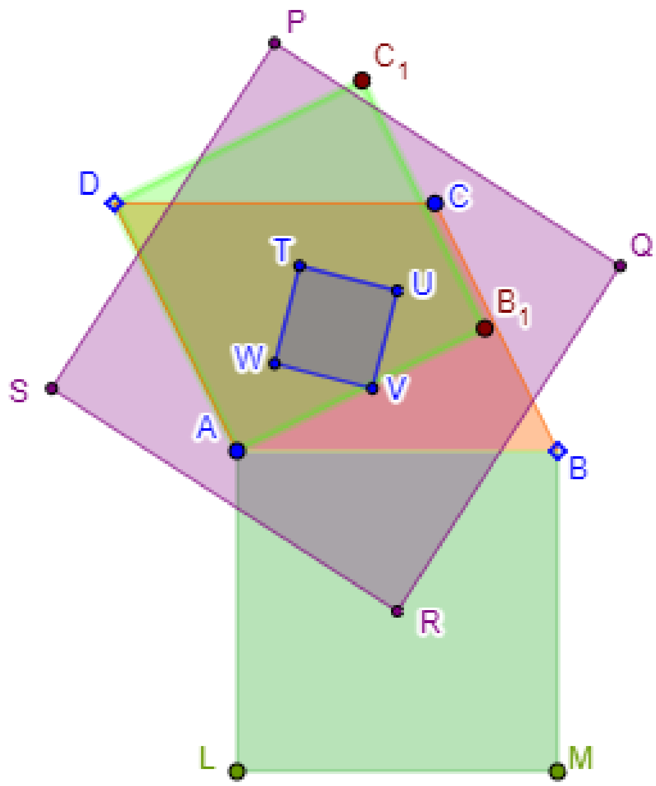
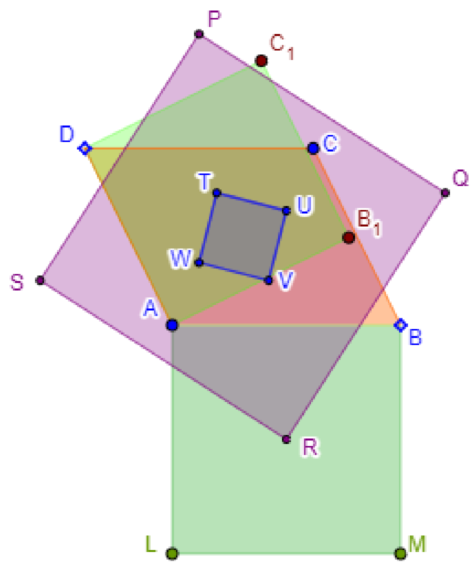


Figura 7: Los cuadrados sobre los centroides y los cuadrados sobre los lados.

de los cuadrados construidos a partir de los centroides, exterior e interiormente, es igual a la suma de las áreas de dos cuadrados diferentes construidos sobre los lados del paralelogramo". La gráfica 8, ilustra esta observación.



¿Existe alguna relación entre las áreas de los cuadrados PQRS y TUVW y las áreas de los cuadrados ABML y DAB_1C_1?

$$\text{Área}(PQRS) + \text{Área}(TUVW) = 10.28063 + 0.61881 = 10.89944$$
$$= \text{Área}(BALM) + \text{Área}(DAC_1B_1) = 4.64944 + 6.25 = 10.89944$$

Figura 8: Una ilustración de la observación 2.

4. El teorema de Dao Thanh Oai

En el año 2015, Dao Thanh Oai, consideró una modificación del problema de Thébault; de manera explícita estudió la siguiente pregunta, ¿Qué sucede si en lugar de unir los centroides de los cuadrados por un polígono, se trazan las rectas determinadas por estos puntos y se prolongan los lados del paralelogramo? El resultado obtenido es el teorema de Dao Thanh Oai y su enunciado es, *"Si sobre los lados de un paralelogramo se construyen cuadrados externos y se prolongan los lados del paralelogramo de manera que intercepten a las rectas que unen los centros de los cuadrados, entonces, los puntos de intersección de estas rectas forman un cuadrado"*. La gráfica 9, ilustra este teorema.

Nótese que, adicionalmente, la construcción sugiere que los lados correspondientes de los cuadrados $PQRS$ y $GHIF$ son paralelos.

4.1. Observaciones al teorema de Dao

En lo que sigue consideramos otras relaciones geométricas que resultan de experimentar, con GeoGebra (u otro software de geometría dinámica), en la construcción que ilustra el teorema de Dao.

Observación 1. Si se analiza con cuidado la anterior gráfica referida a la construcción del teorema de Dao, es posible observar que entre las rectas determinadas por los centros de los cuadrados y

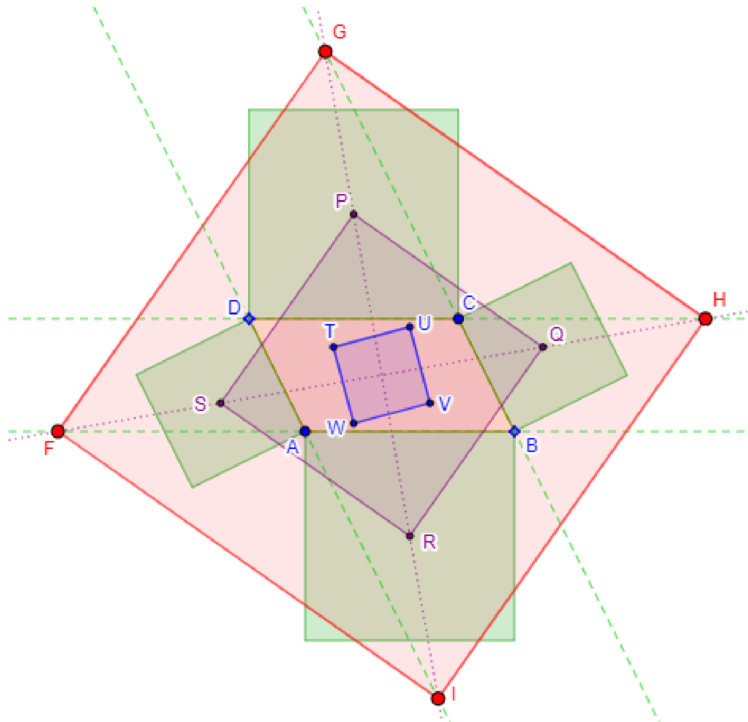


Figura 9: Una ilustración del Teorema de Dao Thanh Oai.

las rectas definidas por los lados del paralelogramo existen cuatro puntos adicionales en los cuales estos pares de rectas se interceptan, ¿el polígono definido por estos cuatro puntos es un cuadrado?

En la gráfica 10, $ABCD$ es el paralelogramo inicial, $PQRS$ es el cuadrado definido por los centros de los cuadrados construidos exteriormente sobre los lados del paralelogramo y $A_2Z_1D_2S_1$ es el polígono determinado por las segundas intersecciones de las rectas determinadas por los lados del paralelogramo y las rectas que unen los centroides de los cuadrados. Las características de este cuadrilátero deducidas a partir de la experimentación con GeoGebra nos permiten sugerir que este polígono es un rombo.

Observación 2. Se han considerado los cuadrados construidos hacia el exterior, consecuentemente, de manera análoga, podríamos considerar los cuadrados construidos hacia el interior, ¿Qué sucede en este caso? ¿resultan ocho puntos de intersección? ¿cuatro de ellos determinan un cuadrado y los otros cuatro un rombo? ¿la relación métrica que se observa en el teorema de Thebault, se conserva en el teorema de Dao Thanh Oai?

En la gráfica 11, $ABCD$ es el paralelogramo inicial, $UVWT$ es el cuadrado definido por los centros de los cuadrados construidos interiormente sobre los lados del paralelogramo y $G_1D_1F_1E_1$ es el polígono determinado por cuatro de las intersecciones de las rectas determinadas por los lados del paralelogramo y las rectas que unen los centroides de los cuadrados hacia el interior. Las características de este cuadrilátero, deducidas a partir de la experimentación con GeoGebra, nos permiten sugerir que este polígono es también, un rombo.

Es un ejercicio instructivo que Ud. elabore construcciones que le permitan verificar las siguientes observaciones:

a. Si considera las otras cuatro intersecciones el polígono determinado por ellas es un cuadrado.
b. En el caso en que los polígonos sean cuadrados, no se percibe una relación entre las áreas

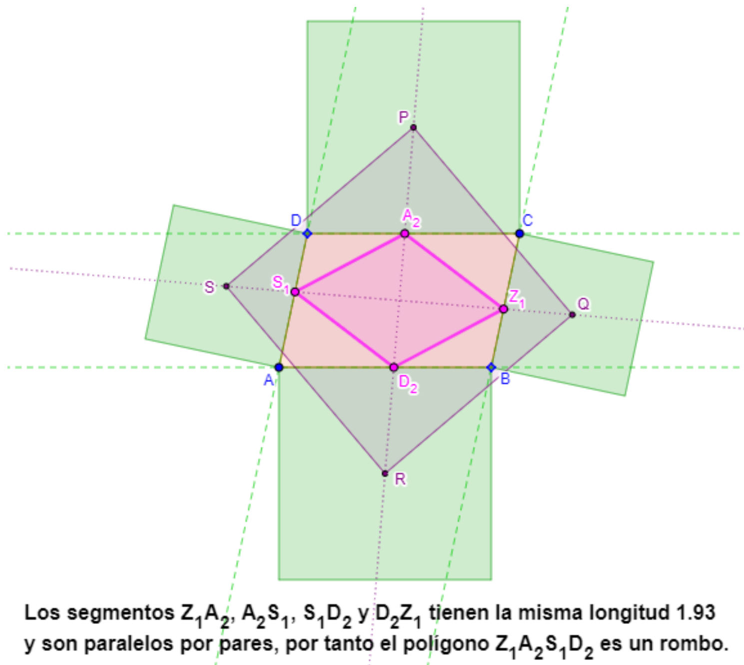


Figura 10: Ilustración de la observación 1.

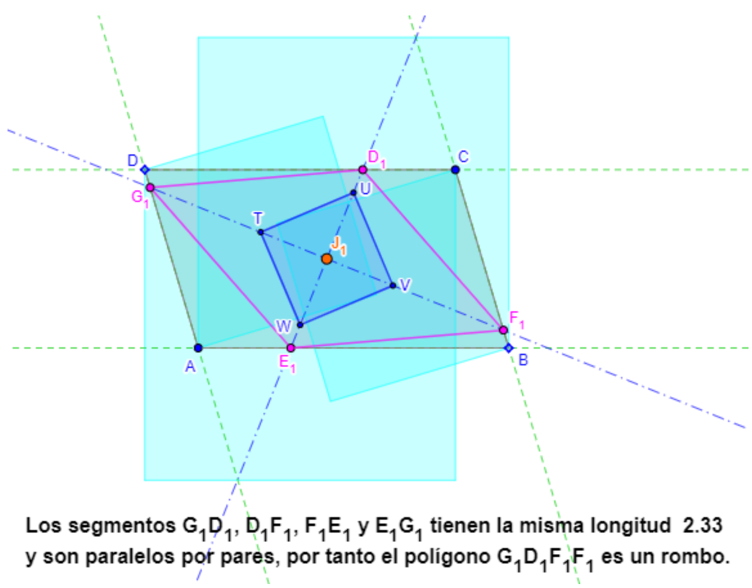


Figura 11: Ilustración de la observación 2.

de estos y el área del paralelogramo, así como tampoco entre el área de estos cuadrados, los determinados por las rectas que unen los centroides y las rectas de los lados del paralelogramo, y el área de los cuadrados definidos por los lados del paralelogramo.

c. El paralelogramo y los seis polígonos construidos a partir de los centros de los cuadrados, las rectas que unen estos puntos y las rectas definidas por los lados del paralelogramo tienen el mismo centroide.

5. Conclusiones

En esta sección final se presentan algunas observaciones que complementan lo considerado en el desarrollo de este documento.

- El surgimiento de software de asistencia geométrica en el modelo dinámico ha puesto de relieve la importancia de la experimentación y la visualización pues permite que se sugieran conjeturas como las expuestas en este artículo, concentradas en objetos de fácil interpretación y construcción. En este sentido, la experimentación y la visualización se convierten en herramientas que anteceden al razonamiento, argumentación y formalidad que requieren los resultados matemáticos y geométricos.
- El uso de software de asistencia geométrica dinámica (AGD), dentro de las aulas escolares ha dinamizado el aprendizaje de la geometría, incrementando pautas de interés y curiosidad y sugiriendo la importancia de establecer laboratorios que dinamicen el estudio de esta ciencia. Después de todo, la geometría, como la ciencia que abstrae la forma de las cosas, es observable y aunque sus resultados sean eminentemente ideales, suelen aplicarse en profesiones técnicas como la ingeniería y la arquitectura, amén de posibilitar la explicación del mundo. Por ejemplo, las leyes de Kepler, contienen elipses, y las concepciones antiguas del universo, multitud de esferas.
- El trabajo sobre las demostraciones se ve sugerido por la atención dedicada de lo que ocurre en el dinamismo que se aplica a los objetos preliminares y básicos de las construcciones y de hecho se ven sugeridas por ellas. Pero también, al contrario, los AGD son la urna de evidencia de los resultados que el hombre ha demostrado por siglos. Puede verificar por ejemplo que la suma de los vectores con extremo inicial P en un punto de un plano y extremos finales los vértices de un triángulo cualquiera ABC sobre el mismo plano, pasa por su centro de gravedad G.
- Esta doble faceta de la existencia de los AGD, ha permitido, por ejemplo, la elaboración de este artículo de divulgación que reitera en que la existencia de estos mediadores modernos, permiten con poco, hacer mucho más de los que se puede hacer en una aula corriente y en consecuencia se insiste en que debe haber una cooperación entre el sistema escolar y los ambientes de aula que privilegien la utilización de estos recursos computacionales, sobre todo, si queremos acercarnos a los puntos de vanguardia que exhiben los sistemas escolares de los países primermundistas.
- Este artículo es evidencia de la mirada curiosa, pero a la vez preparada de sus proponentes, centrado en objetos geométricos de fácil asimilación e interpretación. En sus resultados, rondan conceptos simples y corrientes como el de área, longitud, rombo, paralelismo, perpendicularidad, comunes en los cursos escolares de geometría. Todo esto es señal inequívoca de que la humanidad seguirá descubriendo resultados que asombran, pero a la vez, debe aparecer un compromiso docente de no limitarse en las aulas a mejorar la fluidez algorítmica operativa de los jóvenes escolares sino también, que el docente de matemáticas se ocupe en que aprendan a visualizar, interpretar, clasificar, ordenar, contar, medir, tasar, diferenciar, abstraer, sintetizar, entre tantos actos pedagógicos que nacen al interior del ejercicio matemático y geométrico.
- Los resultados que hemos expuesto son verdaderos para las infinitas disposiciones de los objetos cuando se someten al arrastre los puntos iniciales de su construcción; sin embargo, establecer estos hechos de manera formal no parece tan simple en el modelo de la geometría sintética. Si algún lector nos proporciona demostraciones de estas proposiciones en el modelo euclidiano, le sugerimos enviarla a alguno de nuestros correos, estamos dispuestos a realizar los trámites ante el editor de la revista para su respectiva publicación.

Referencias

[1] Altshiller, N. (1962). College Geometry. An introduction to Modern Goemetry of the Triangle and the Circle. Barnes and Noble. New York. Catalogue card number: 52 - 13504

[2] Dao, T. O. (2015). The Dao variant of Thébault's first problem. http://www.cut-the-knot.org

[3] Grozdev, S. and Dekov, D. (2016). Computer Discovered Mathematics: Inversion of Triangle with respect to the Incircle. International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM) ISSN 2367-7775, Volume 1, No.2, pp.64-74

[4] Martin I. (2001). Geometry for College Students. The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA.

[5] Ministerio de Educación Nacional-MEN. (1998). Matemáticas: Lineamientos curriculares. Bogotá: Editorial Panamericana Formas e impresos. Bogotá.

[6] Mosquera, S. (2021). Construcciones geométricas con GeoGebra. Editorial Universidad de Nariño. ISBN 978-628-7509-23-8. San Juan de Pasto. Colombia. https://sired.udenar.edu.co/7335/

[7] Yaglom I. M. (1962). Geometric Transformations. New Mathematical Library, Random House, New York.