

MARMOLEJO, BUSTAMANTE Y CORDOBA. 2023. Desarrollo de la visualización a través del estudio de la relación perímetro-Área. Una secuencia de enseñanza. Revista Sigma, 19 (2). Páginas 42–57.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XIX N^o 2 (2023), páginas 42–57

Universidad de Nariño

Desarrollo de la visualización a través del estudio de la relación perímetro-Área. Una secuencia de enseñanza ¹

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia ²

Claudia Ximena Bustamante Puertas ³

Marylin Cordoba Castillo ⁴

Abstract: Visualization plays an important role in learning mathematics. But considering this cognitive activity is not obvious or immediate, on the contrary, it is susceptible to development. The study of the existing relationships between area and perimeter ($R(p/a)$) offers opportunities to encourage the development of visualization, the above, from the first years of basic education. This article presents a teaching sequence to promote the development of visualization through the study of $R(p/a)$. Two visual elements were considered in the design of the teaching sequence tasks: visual operations and visual control elements. The teaching sequence, presented here, constitutes a powerful tool for those mathematics educators interested in promoting the development of visualization.

Keywords. Visualization, Perimeter-area relationship, Teaching sequence.

Resumen: La visualización desempeña un papel importante para el aprendizaje de las matemáticas. Pero, su consideración no es obvia ni inmediata, al contrario, es susceptible de desarrollo. El estudio de las relaciones existentes entre el área y el perímetro ($R(p/a)$) ofrece oportunidades para el desarrollo de esta actividad cognitiva, esto desde los primeros años de la educación básica. El propósito de este artículo, es exponer una secuencia de enseñanza encaminada a promover el desarrollo de

¹La secuencia de enseñanza expuesta en este artículo fue el instrumento de extracción de datos en la investigación *¿Cómo intervienen las diferentes relaciones que suscitan el área y el perímetro en el desarrollo de la visualización?* Este trabajo fue desarrollado en la maestría en educación, énfasis en educación matemática de la Universidad del Valle. Fue sustentado, como trabajo de grado, por las dos coautoras del artículo, el tercer investigador fungió como asesor.

²Universidad de Nariño. Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística. Correo: g.marmolejo.math@udenar.edu.co

³Institución Educativa José María Cordoba. Profesora del Departamento de Matemáticas. Correo: claudia.bustamante.puertas@correounivalle.edu.co

⁴Institución Educativa Francisco José Lloreda, Profesora del Departamento de Matemáticas. Correo: marycc16@gmail.com

la visualización a través del estudio de la $R(p/a)$. Dos elementos visuales fueron considerados en el diseño de las tareas que constituyen la secuencia de enseñanza: operaciones visuales y elementos de control visual. La secuencia de enseñanza constituye una poderosa herramienta para aquellos educadores matemáticos interesados en promover el desarrollo de la visualización.

Palabras Clave. Visualización, Relación perímetro-área, Secuencia de enseñanza.

1. Introducción

La visualización desempeña un papel determinante en la enseñanza de la geometría y la medición (Duval, 2017; Marmolejo, 2007; 2010). Pero, la mayoría de los estudiantes (Duval, 2017; Marmolejo & Vega, 2012; Marmolejo, 2007) incluso algunos educadores (Marmolejo & Vega, 2012; Marmolejo et al., 2017) y los libros de texto (Marmolejo, 2020; Marmolejo et al., 2015; Marmolejo, 2018) no recurren a esta actividad cognitiva al desarrollar o promover tareas matemáticas. En breve, la visualización no tiende a ser considerada como objeto de reflexión en la enseñanza de las matemáticas. El estudio del área y del perímetro de superficies planas se impone como un lugar idóneo para suscitar el desarrollo de la visualización. El propósito de este artículo es exponer una secuencia de enseñanza⁵ encaminada a suscitar el desarrollo de la visualización a través del estudio de la $R(p/a)$.

2. Pautas para suscitar el desarrollo de la visualización en las figuras 2D/2D

La visualización en el estudio de la geometría y la medición exige la discriminación de tres formas de aprehensión de información visual en las configuraciones geométricas: *Aprehensión perceptual*, *Aprehensión operatoria* y *Aprehensión discursiva*. Mientras que el primer tipo de aprehensión es espontáneo (organizado por nuestra estructura del cerebro) y obstaculiza el estudio de la geometría y la medición (Duval, 2017), los dos restantes no. El desarrollo de la visualización debe considerar, por tanto, la inhibición perceptiva de la Aprehensión perceptual y la reflexión sobre las Aprehensiones operatoria y discursiva, así como su articulación (Duval, 2017).

2.1. Aprehensión operatoria

Requiere, en palabras de Duval (2017), la aplicación de tareas cuya resolución exija la introducción de tratamientos figurales así como la solicitud, explícita y sistemática, de la aplicación de operaciones visuales. Si bien estas son condiciones necesarias y evidentes, no se consideran en la enseñanza de las matemáticas y, por sí mismas, no son suficientes para asegurar el desarrollo visual. Es necesario, como mínimo, que las tareas no estén incluidas en actividades de razonamiento, por tanto, que no precisen la utilización de axiomas o teoremas, y que tampoco requieran cambios dimensionales en la forma de ver (pasar de focalizar la atención en las partes 2D de una figura, a hacerlo en partes 1D o 0D) en la cadena de sub-figuras explicitadas. Además, es indispensable organizar las tareas según el

⁵Conjunto de tareas ordenadas por momentos, donde cada momento responde a un propósito educativo. Al interior de cada Momento, las tareas se organizan en orden decreciente según la complejidad que subyace a su desarrollo.

nivel de complejidad visual que subyace a su resolución, esto desde una complejidad menor a una mayor (Duval, 2017; Marmolejo, 2016).

En cuanto a la última de las condiciones reseñadas en el párrafo anterior, se ha puesto en evidencia la existencia de estructuras de control a través de las cuales el control de acciones cognitivas se ve influenciado y/o dirigido mediante el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Estas “permiten expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios acerca de si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balacheff & Gaudin, 2010, p. 192).

En los estudios sobre la visualización se han identificado estructuras de control visual; aluden a la organización de todo tipo de estrategia o recurso que, explícita o implícitamente, facilita o retarda la consideración y aplicación de acciones visuales (por ejemplo, la reconfiguración) o la comprensión de su papel en la realización, análisis o seguimiento de una tarea matemática (Marmolejo & González, 2015). En este sentido, existe cuatro estructuras de control visual, a saber: contenido, procedimiento, visibilidad o iconismo (Marmolejo & González, 2015b). Las dos primeras consideran, respectivamente, las transformaciones figurales “mostradas” en las definiciones de propiedades y relaciones matemáticas, así como en los despliegues de procedimientos expuestos. La tercera, contempla tanto la inclusión de factores de visibilidad (Padilla, 1992) como de elementos de contraste e índices (Marmolejo & González, 2015). El iconismo, por su parte, resalta que la “figura representa o alude a un objeto físico o a una acción física. Las características del objeto o de la acción planteada guían la manera de proceder visualmente” (p. 318).

2.2. Aprehensión discursiva

Se asigna un rol determinante a la aplicación de tareas de completado de figuras (Duval, 2004). Es decir, tareas donde “los ángulos, los segmentos están parcial o completamente borrados, de manera que, con un golpe de vista, nada o casi nada se organiza en una forma inmediatamente reconocible” (p. 23). Así, los estudiantes de forma visual y, con ayuda de instrumentos, podrán aplicar sobre las figuras prolongaciones. Estos trazos promoverán la aparición de puntos de intersección ausentes y permitirán la discriminación de nuevos elementos geométricos.

En este sentido, las actividades de restauración obligan a realizar operaciones como observar una figura fuera de su marco de referencia, prolongar la recta soporte de los segmentos, reorganizar una figura dada y discriminar en una figura, otra, u otras configuraciones. Otros estudios proponen el área de superficies planas y su articulación con otras magnitudes como tópicos propicios para suscitar el desarrollo de la visualización (Marmolejo y Vega, 2012).

Siguiendo este aspecto de análisis, se han identificado diferentes funciones que puede desempeñar la visualización a través del estudio del área y del perímetro (Marmolejo y González, 2013), también se han discriminado operaciones visuales que determinan el estudio de la aprehensión operatoria, las cuales apoyan la aprehensión discursiva (Marmolejo y González, 2013; Marmolejo et al., 2020). Asimismo, se han determinado estructuras de control para promover la discriminación de flujos visuales específicos (Marmolejo y González, 2015) y funciones que desempeñan estas estructuras de control (Marmolejo, 2020).

3. La Secuencia de enseñanza

El diseño de la secuencia de enseñanza consideró, en primera instancia, una revisión bibliográfica en revistas de educación matemática para identificar dificultades, errores y obstáculos en el estudio de la $R(p/a)$. Posteriormente, se analizó los referentes que aportan pautas para promover el desarrollo de la visualización (Duval, 2017; 2004). A continuación, se identificaron, a partir de los referentes teóricos anteriores, ideas que permitirán planificar el diseño de la secuencia de enseñanza (Ideas claves de diseño)⁶. En seguida, se procedió a un proceso de diseño de las tareas y a la evaluación del nivel de consistencia y asertividad de las tareas. Luego, las tareas fueron presentadas a tres profesores con amplia experiencia en la enseñanza de las matemáticas, todos con título en maestría en educación matemática para su evaluación. Finalmente, en un pilotaje, las tareas fueron aplicadas a un grupo de una institución educativa seleccionada al azar. Las tres últimas fases, arrojaron oportunidades de mejora que permitieron potencializar el diseño desarrollado.

La secuencia de enseñanza se compone de diecisiete tareas, ordenadas en tres momentos: M1, M2 y M3:

- **M1:** Suscita el paso de la aprehensión perceptual a la aprehensión operatoria: se debe aplicar la operación visual de reconfiguración simple (fraccionar una figura en partes, reorganizar las partes, y “armar” una nueva figura de contorno global distinto e igual área). Las tareas de este momento exigen establecer relaciones de orden y equivalencia entre figuras geométricas bidimensionales a partir de sus cantidades de área. Este momento está conformado por cinco Tareas (T1.1, T1.2, T1.3, T1.4 y T1.5).
- **M2:** Posibilita el paso de la aprehensión perceptual a la aprehensión operatoria y discursiva: considera tanto de cambios dimensionales en la forma de ver como de la aprehensión operatoria 1D. Se privilegian la aplicación de dos operaciones visuales: Linealización y Deslinealización. En la primera operación, se focaliza la atención en las líneas que conforman el contorno de una figura bidimensional, se aplican operaciones intra-figurales (de naturaleza unidimensional) sobre ellas, de tal forma que se convierta el contorno de la figura en un segmento de recta. En cuanto a la segunda operación, se pasa de centrar la atención en un segmento de recta, se aplican operaciones intra-figurales sobre partes de ella, de tal forma que el segmento se transforme en el contorno de una figura geométrica bidimensional. En el proceso, se solicita establecer relaciones de orden y equivalencia entre perímetros de figuras bidimensionales. Ocho son las tareas que conforman este momento: T2.1, T2.2, T2.3, T2.4, T2.5, T2.6, T2.7 y T2.8.
- **M3:** Pretende pasar de la aprehensión discursiva a la operatoria articulando las operaciones visuales y las relaciones de orden y equivalencia tratadas en los momentos previos. De esta forma suscita el estudio de dos tipos de $R(p/a)$. Cuatro tareas constituyen este momento (T3.1, T3.2, T3.3 y T3.4).

3.1. Tareas de la secuencia de enseñanza

En lo que sigue se presentan las tareas que constituyen los tres momentos de la secuencia de enseñanza:

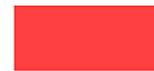
⁶Asumir la construcción de las magnitudes área y perímetro (MEN, 2006), 2) recurrir a la visualización (Marmolejo, Sanchez y Londoño, 2017) como actividad cognitiva fundamental para promover el estudio de las magnitudes y su articulación (Marmolejo y Vega, 2012; otros), 3) privilegiar como tipos de $R(p/A)$ a estudiar cuando el perímetro disminuye y el área aumenta y viceversa (Fandiño y DÁmores, 2017) y considerar un vocabulario significativo para aludir al área (cantidad de superficie) y al perímetro (longitud del contorno).

3.1.1. Tareas de M1:

Tarea 1.1: Una estudiante de grado quinto le propuso a su madre realizarle una cobija a su mascota con un retazo de tela que sobró de una camisa (ver Figura A). Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos). ¿De qué manera puede la mamá reacomodar la tela usando la Figura A para que pueda verse como la Figura B y cubrir a su mascota al dormir? Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.



A



B

Tarea 1.2: Juan afirma que la figura C tiene mayor cantidad de superficie que la Figura D. Al contrario, Valentina dice que la Figura C es quien tiene la menor cantidad de superficie. ¿Quién de los dos tiene la razón? Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que seguiste para responder la pregunta realizada.



C



D

Tarea 1.3: ¿Cómo puedes demostrar que las figuras E y F tienen Igual cantidad de superficie? Explica en la hoja paso a paso, el procedimiento que seguiste para responder la pregunta realizada.



E



F

Tarea 1.4: La siguiente figura G muestra una parte sombreada. ¿Cuál es la cantidad de área representada por la parte sombreada? Explica qué transformaciones sufrió la figura y cómo obtuviste la respuesta. **Extraído de Padilla 92**



G

Tarea 1.5: Considera la cantidad de superficie de cada una de las figuras representadas abajo, para ordenarlas de mayor a menor. Explica detalladamente cuál fue el procedimiento que utilizaste para realizar esta tarea.

Teniendo en cuenta las cantidades de superficie de las figuras, responde cuáles de las afirmaciones descritas abajo son falsas y cuáles son verdaderas.

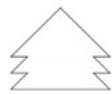
Explica detalladamente tu procedimiento.

1. Las figuras H e I tienen igual cantidad de superficie.
2. La cantidad de superficie de la figura J es mayor que la cantidad de superficie de la figura I.
3. La cantidad de superficie de la figura K es menor que la cantidad de superficie de la figura H.



3.1.2. Tareas de M2:

Tarea 2.1: En clase de artística se construyó, con alambre, un árbol de navidad (ver Figura L). La profesora llevó el árbol para su casa para hacer otro igual, pero, antes de hacerlo, su pequeño hijo (sin querer) desplegó el alambre utilizado para construir el árbol; al ver el daño hecho, el niño colocó el alambre desplegado encima de una mesa donde estaba otro alambre (ver alambres 1 y 2). Ahora, la profesora tiene que construir de nuevo el árbol. Explica, paso por paso y de manera muy precisa (si es el caso utiliza dibujos) cómo la profesora podría descubrir cuál de los dos alambres fue el utilizado en el colegio para construir el árbol de navidad. Solo puedes utilizar los materiales que te entregará tu profesora.



L



Alambre 1



Alambre 2

Tarea 2.2: ¿La longitud del contorno de la Figura M es igual o mayor que la longitud del Segmento de línea A? Explica en la hoja el procedimiento que realizaste para responder la pregunta planteada.



M



Segmento
de línea A

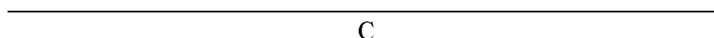
Tarea 2.3: Utiliza lo aprendido en las tareas 2.1 y 2.2 para decir cuál de las siguientes afirmaciones es la verdadera:

- La Figura L tiene mayor longitud de contorno que la Figura M.
- La Figura M tiene mayor longitud de contorno que la Figura L.
- La Figura L tiene igual longitud de contorno que la Figura M.

Tarea 2.4: Felipe utilizó la longitud del segmento de línea B para construir la Figura N. Explica cómo lo hizo.



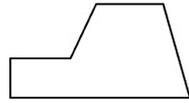
Tarea 2.5: Construye una figura de cuatro lados cuya longitud de contorno sea igual que la longitud del segmento de línea C. Nombra la figura construida como la Figura Ñ. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que seguiste para desarrollar esta tarea.



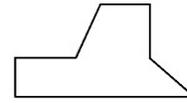
Tarea 2.6: Utiliza lo aprendido en las Tareas 2.4 y 2.5 para desarrollar la siguiente tarea:

- Construye una figura (nómbrela Figura O) que tenga mayor longitud de contorno que la Figura N y, al mismo tiempo, menor longitud de contorno que la Figura Ñ. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.

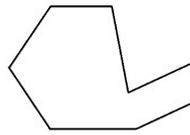
Tarea 2.7: Considera las longitudes de contorno de las figuras abajo representadas y ordenarlas de mayor a menor. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.



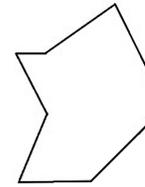
P



Q



R



S

Tarea 2.8: Construye una figura (Nómbrela Figura T) con una longitud de contorno mayor que el de la Figura Q y menor que el de la Figura P. Explica en la hoja, paso a paso, el procedimiento que realizaste para resolver la tarea propuesta.

3.1.3. Tareas de M3:

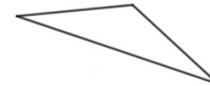
Tarea 3.1: Ordena de mayor a menor las cuatro figuras representadas abajo (Figuras U, V, W y X), primero, teniendo en cuenta sus cantidades de superficies; luego, sus longitudes de contorno.

Debes describir y justificar, paso a paso, los procedimientos que realizaste para resolver esta tarea. Teniendo en cuenta lo anterior, responde la siguiente pregunta:

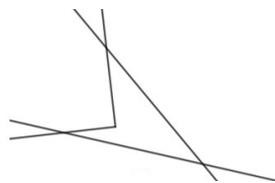
¿Cuál es la principal conclusión que puedes sacar al comparar las cuatro figuras reseñadas?



U



V



W



X

Tarea 3.2: Construye una Figura B' de forma distinta a la Figura A' dada, de tal forma que cumpla con la siguiente condición:

- La cantidad de superficie de la Figura A' es igual a la cantidad de superficie de la Figura B', y la longitud de contorno de la Figura A' es mayor que la longitud de contorno de la Figura B'.

Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.

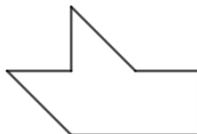


A'

Tarea 3.3: Dada la Figura C' construye una Figura D' que cumpla la siguiente condición:

- La longitud de contorno de la Figura C' es mayor que la longitud de contorno de la Figura D' y la cantidad de superficie de la Figura C' es menor que la cantidad de superficie de la Figura D'.

Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.



C'

Tarea 3.4 Dada la Figura E' construir una Figura F' de tal forma que se cumpla la siguiente condición:

- La cantidad de superficie de la Figura E' es mayor que la cantidad de superficie de la Figura F' y la longitud de contorno de la Figura E' es menor que la longitud de contorno de la Figura F'.

Realiza paso a paso el procedimiento y justifica tu respuesta.



E'

4. Caracterización visual de las tareas

En lo que sigue, y según cada momento (Tabla 1, para M1, Tabla 2, para M2, Tabla 3, para M3) se expresan los elementos teórico-conceptuales que caracterizan la visualización en las tareas de la secuencia de enseñanza (variables visuales de diseño): operaciones cognitivas de naturaleza visual y elementos de control visual. Estas variables permitieron organizar las tareas según su propósito y la complejidad cognitiva que subyace a su desarrollo.

Tabla 1. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento del área de superficies planas de las tareas propuestas en M1

TAREA	OPERACIÓN VISUAL APROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
1.1	Reconfiguración simple	<ul style="list-style-type: none"> ■ Iconismo (contexto de costura). ■ Procedimiento (directo y por referencia). ■ Factores de visibilidad (complementariedad de formas).
1.2		<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (figuras convexas). ■ Procedimiento (Directo). ■ Contenido (Cantidad de superficie y relación de equivalencia entre cantidades de superficie).
1.3		<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento (Directo y por réplica). ■ Contenido (relación de equivalencia entre cantidades de superficie).
1.4		<ul style="list-style-type: none"> ■ Contenido: (relación de equivalencia entre cantidades de superficie). ■ Contraste: (grosor, sombreado, color).
1.5		<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (figuras convexas). ■ Procedimiento (Directo y por réplica). ■ Contenido (Relación de orden y equivalencia entre cantidades de superficie).

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el tratamiento de la longitud de contorno de las tareas propuestas en M2

TAREA	OPERACIÓN VISUAL APROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
T2.1	Cambio dimensional + Linealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Iconismo (contexto de la pregunta). ■ Procedimiento (directo) existe una figura de partida y una figura de llegada. ■ Visibilidad (elementos de contraste: grosor del contorno de la figura).
T2.2	Cambio dimensional + Linealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Visibilidad (elementos de contraste: grosor del contorno de la figura, grado de inclinación de la figura, paralelismo entre lados). ■ Procedimiento por réplica. ■ Contenido (def. longitud de contorno, relación de orden y equivalencia de longitud de contorno).
T2.3	Cambio dimensional + Linealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento por réplica. ■ Contenido (relación de orden equivalencia de longitud de contorno).
T2.4	Cambio dimensional + Deslinealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento directo. ■ Visibilidad (factores de visibilidad paralelismo entre dos lados, grosor en los lados de una figura).
T2.5	Cambio dimensional + Deslinealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento directo. ■ Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno). ■ Visibilidad (elementos de contraste grosor en el contorno de la línea, factor de visibilidad: inclinación en la línea).
T2.6	Cambio dimensional + Deslinealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento directo y réplica. ■ Contenido (relación de orden equivalencia de longitud de contorno).

T2.7	Cambio dimensional + Linealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento directo. ■ Visibilidad (elementos de contraste: grosor de los lados de la figura). ■ Contenido (relación de orden y equivalencia de longitud de contorno).
T2.8	Cambio dimensional + (Linealización + Deslinealización)	<ul style="list-style-type: none"> ■ Procedimiento por réplica. ■ Contenido (relación de orden equivalencia de longitud de contorno).

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3. Operaciones visuales y elementos de control que intervienen en el diseño de las Tareas del M3.

TAREA	OPERACIÓN VISUAL APROMOVER	ELEMENTOS DE CONTROL INCLUIDOS
3.1	Reconfiguración, cambio dimensional, linealización y deslinealización	<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (complementariedad de formas y las características del contorno). ■ Procedimiento (Directo). ■ Contenido (la relación de orden y equivalencia de las figuras según su cantidad de superficie y su longitud de contorno).
3.2		<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (figuras convexas). ■ Procedimiento (Réplica). ■ Contenido (Relación cuando el área es igual y el perímetro aumenta).
3.3		<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (la convexidad en el contorno de las figuras). ■ Procedimiento (Directo). ■ Contenido (proponer una figura de llegada con menor longitud de contorno y mayor cantidad de superficie).
3.4		<ul style="list-style-type: none"> ■ Factores de visibilidad (parte sombreada de la figura, contraste de grosor, rayado). ■ Procedimiento (Directo). ■ Contenido: determina la longitud de contorno, para proponer otra figura de contorno diferente con menor cantidad de superficie).

Fuente: Elaboración propia.

5. Conclusiones:

La secuencia de enseñanza expuesta en este artículo posibilita una entrada a la geometría en la educación básica. Su aplicación pretende favorecer el desarrollo de la visualización a través del estudio de la $R(p/a)$. También, aporta elementos para suscitar tanto el desarrollo de pensamiento espacial como de pensamiento métrico (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Por ejemplo, “la apropiación del espacio geométrico” (p. 62) y el estudio de las “relaciones espaciales . . . de las superficies, [de las] regiones y figuras planas con sus fronteras, lados y vértices” (p. 62). Asimismo, incluye como objetos de reflexión “los procesos de localización en relación con sistemas de referencia, y del estudio de lo que cambia o se mantiene en las formas geométricas bajo distintas transformaciones” (p. 62).

En cuanto al desarrollo de pensamiento métrico, la aplicación de la secuencia de enseñanza favorece “la construcción de los conceptos de cada magnitud” (p. 63) y “la comprensión de los procesos de conservación de magnitudes” (p. 63). Por todo lo anterior, la secuencia de enseñanza aquí expuesta constituye una importante herramienta para que, los educadores matemáticos transformen o actualicen la enseñanza de la geometría y la medición en las escuelas colombianas.

Como se mencionó antes, la secuencia de enseñanza fue aplicada en el marco de un trabajo de grado para optar al título de magister en Educación, Énfasis en Educación Matemática, en la universidad del Valle (Colombia). El proceso de aplicación arrojó una serie de consideraciones para los educadores matemáticos que deseen recurrir a la propuesta de enseñanza para promover el desarrollo de la visualización:

- Los elementos de control considerados para guiar el desarrollo de la visualización de una tarea a la siguiente posibilitaron un aprendizaje eficaz de la visualización de las figuras, puntualmente, en la consideración de aplicación de las operaciones visuales de reconfiguración, linealización y deslinealización.
- La inclusión de los elementos de control suscitó la organización en un orden de complejidad cognitivo de menor a mayor, cuestión que desencadenó que los estudiantes utilizaran los procedimientos y los conocimientos aprehendidos en las tareas previas para organizar el desarrollo de las tareas nuevas.
- El hecho que las figuras que hacen parte de las tareas hayan sido representadas sobre papel, posibilitó, la aplicación de acciones sobre este soporte que favorecieron el estudio de las magnitudes área y perímetro, entre otras, el calcado, la inclusión de trazos, la aplicación de recortes y dobleces, los cuales, a su vez, permitieron la delimitación entre longitud y superficie.

Para finalizar, es importante llamar la atención en el diseño de secuencias de enseñanza encaminadas a suscitar el desarrollo de la visualización en representaciones de naturaleza distinta, es el caso de las figuras 3D/2D (tridimensionales representadas sobre un soporte bidimensional). En tales casos, las magnitudes volumen y capacidad desempeñan un lugar a explorar. En cuanto a la visualización asociada a las figuras 2D/2D, es importante, el diseño de tareas que permitan reflexionar sobre la visualización en actividades propias de la magnitud ángulo, o explorar tareas en contextos de área y perímetros pero, donde se incluya, el paso de la magnitud a la construcción de fórmulas para calcular el área o el perímetro.

Referencias

- [1] Balacheff, N. & Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 16, 183-211.
- [2] Duval, R. (2017). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectuales (M. Vega Restrepo, Trad.), (2ª ed.). Cali, Colombia: Pograma Editorial. Univalle.
- [3] Duval, R. (2004). Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta. En M.C. Chamorro (Ed), *Números, fórmulas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 159-188). Instituto Superior de Formación del Profesorado. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Sociedad anónima de fotocomposición.
- [4] D'Ámore, B., & Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *RELIME*, 10(1), 39-68
- [5] Marmolejo, G-A. (2020). Función de control visual en el tratamiento del área de superficies planas. Un estudio comparativo de libros de texto colombianos y españoles. En Marmolejo (Ed.) *Conversión, lecturabilidad icónica y función de control visual (111-143)*. Editorial Universidad de Nariño.
- [6] Marmolejo, G-A. (2018). ¿Cómo promueven el cambio dimensional los libros de texto colombianos en relación con el área de regiones poligonales? *Ecomatemático*, 9(1), 15-22
- [7] Marmolejo, G-A. (2016). Situaciones problemáticas para la enseñanza del área de regiones poligonales en los primeros ciclos de la educación básica. Introducción a la Magnitud área y su medida. En, Marmolejo (Ed.) *Introducción al desarrollo de pensamiento métrico y a los sistemas de medidas en la educación básica primaria. Elementos a considerar en la planeación y transformación de las prácticas educativas en el aula de clase (27-64)*. Save the Children.
- [8] Marmolejo, G-A. (2014). Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Salamanca, Salamanca, España.
- [9] Marmolejo, G-A. (2012). Elementos a considerar en la enseñanza del registro semiótico de las figuras en los primeros ciclos de la educación básica. *Revista Ecomatemático*, 3(1), 14-19.
- [10] Marmolejo (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Sigma*, 19(2), 10-26.
- [11] Marmolejo, G. A. (2007). *Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras. Procesos de visualización y factores de visibilidad* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- [12] Marmolejo, G-A. & González, M-T (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Relime*, 18(1), 301-328.
- [13] Marmolejo, G-A. & González, M-T (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 10(1), 45-57
- [14] Marmolejo, G. & González, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- [15] Marmolejo, G. A. & González, M. T. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.
- [16] Marmolejo, G., Guzmán, J. & Insuaty, A. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica. ¿Figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista Científica*, 23 (1), 43-56. Doi: [10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a4](https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a4).

- [17] Marmolejo, G-A., Muñoz, O., & Prada, R. (2021). Estrategias meta-cognitivas y niveles de autonomía visual promovidos por un educador matemático en formación. Descripción y ejemplificación de aplicación de un instrumento metodológico, *Revista Boletín Redipe*, 10(10), 22-32.
- [18] Marmolejo, G-A., Sánchez, N., & Londoño, S. (2017). Conocimiento visual de los educadores al promover el estudio de la relación perímetro-área. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*,18(1), 18-28.
- [19] Marmolejo, G-A., Vega, M-B., & Galeano, J-E, (2020). Reconfigurando figuras bidimensionales, *Revista espacios*, 41(42), 63-80.
- [20] Marmolejo, G. & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje, *Educación Matemática* 24(3) 7-32.
- [21] Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá, Colombia. Imprenta Nacional de Colombia
- [22] Padilla, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathématiques* (Thèse de doctorat non publié). Université de Strasbourg, Strasbourg, France.