ANYI D. CORREDOR, RICARDO CÓRDOBA 2024. Aportes histórico-epistemológicos sobre integral definida en Newton, Cauchy, Riemann y Lebesgue. Revista Sigma, 20(1). Páginas. 20-29

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XX № 1 (2024), páginas 20–29

Aportes histórico-epistemológicos sobre integral definida en Newton, Cauchy, Riemann y Lebesgue

Anyi D. Corredor [1]
Ricardo Córdoba [2]

Resumen: En este documento analizaremos algunos apotes histórico-epistemológicos sobre la integral definida marcados por el trabajo de diferentes matemáticos. Estudiaremos con detalle los resultados matemáticos obtenidos por Cauchy, Riemann y Lebesgue, sobre el tema de integración, enfocándose en el enriquecimiento paulatino del concepto de integralidad. Además, también analizaremos "el falso teorema de Cauchy", con el fin de destacar la importancia del trabajo de la historia de las matemáticas al permitir rescatar el valor de ciertos resultados matemáticos considerados incorrectos. La integración se remonta mucho antes del siglo XIX. Eso surgió por primera vez como un método para encontrar áreas. Sus raíces se encuentran en el trabajo de Arquímedes (siglo III a.C.), cuando un área determinada se aproximaba dividiéndola en rectángulos u otras formas de área conocida, que se hicieron cada vez más pequeñas para aproximar el área deseada, a través del proceso de exhaución.

Palabras Clave. Integral de Cauchy, Integral de Riemann, Integral de Lebesgue.

1. Introducción

En el siglo XVII, Newton en su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* ([7]), estudió el cálculo de áreas a través del problema de "cuadratura", es decir, el problema de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a un área dada. Dio un procedimiento de cálculo de áreas bajo curvas, y lo justificó con un argumento que no satisface los requisitos modernos de rigor, pero sin duda sigue un proceso lógico. Veamos en general el procedimiento seguido por Newton, para ello considere la Figura 1.

Para aproximar el área en la figura, Newton divide el intervalo en subintervalos iguales (ver Figura 1). A cada subintervalo le corresponden dos rectángulos: uno cuya altura es el valor máximo de la función en ese intervalo y el otro cuya altura es el valor mínimo de la función en el mismo intervalo. El área está entre la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos. La diferencia entre estas dos áreas es la suma de las áreas de los rectángulos $\square aKbl, \square bLcm, \square cMdn, \square dDEO$. Ahora, si estos rectángulos estaban todos alineados debajo del rectángulo superior, $\square akbl$, se puede ver que la suma de sus áreas es igual al cambio de altura de la función multiplicado por la longitud de cualquier subintervalo. Por lo tanto, se puede hacer la diferencia en las áreas para aproximarse a cero, tomando subintervalos cada vez más pequeños. Según Newton, todas estas áreas se acercan al mismo valor que la longitud del subintervalo se acerca a 0.

Newton también considera el caso donde los subintervalos son de diferente longitud (ver Figura 1). Señala que la suma de las diferencias de las áreas es aún menor que el cambio de altura multiplicado por la longitud del subintervalo más largo. Esto significa que se obtendrá el mismo valor del "límite"para la relación si la longitud del subintervalo más largo se aproxima a 0.

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán-Colombia
[2]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto-Colombia

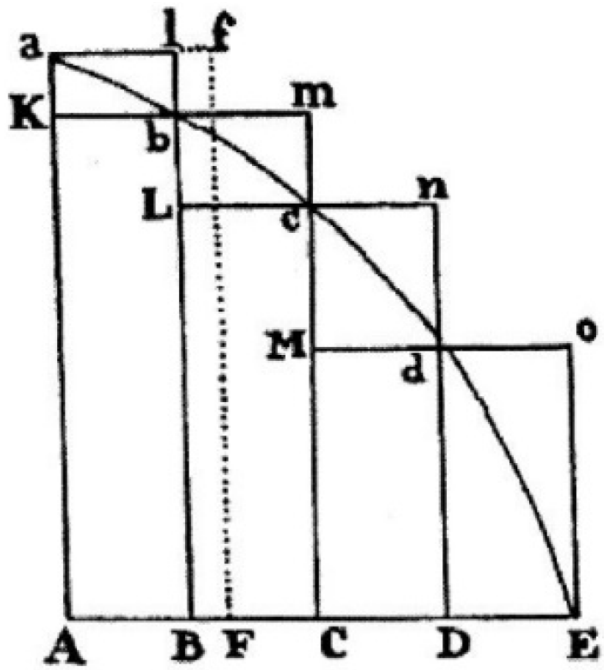

Figura 1: Área bajo la curva decreciente de Newton' principia.

A principios del siglo XVIII, gran parte de lo que hoy se llama Cálculo ya estaba bien conocido e incluido en los libros de texto de la época. Las reglas para diferenciar e integrar funciones elementales, la expansión de funciones en series de potencia o la resolución de ecuaciones diferenciales simples se utilizaron como herramientas poderosas para el cálculo de Newton y el cálculo de Leibniz. Sin embargo, comenzaron a surgir problemas con el uso de métodos infinitesimales, planteados por primera vez en 1731 por Berkeley, fueron la fuente de muchos debates durante el siglo XVIII.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 presentamos algunos elementos históricos y matemáticos relacionados con el trabajo de Cauchy referentes a la integral definida. En la Sección 3 estudiamos algunos aspectos históricos en el surgimiento de la integral definida en el sentido de Riemann. En la Sección 4 analizamos el trabajo de Lebesgue en torno al problema de la medida y la integral definida. Finalmente en la Sección 5 consideramos el falso teorema de Cauchy con el fin de ejemplificar la importancia de la historia de las matemáticas al permitir rescatar el valor de un trabajo científico considerado incorrecto. En esta sección se considera el concepto de continuidad que es fundamental en el estudio de la integral definida.

2. La integral de Cauchy

En 1823, Cauchy publica: *el Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (ver [3]) (Compendio de las lecciones de cálculo infinitesimal), y en 1829 *ven la luz las Leçons sur le calcul différentiel* ([4]) (Lecciones sobre el cálculo diferencial). Estos dos libros, junto con el *Cours d'analyse* ([2]), constituyen la obra en que Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con todo rigor.

En sus textos, Cauchy maneja los siguientes conceptos:

Definición 2.1. Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que acaben por diferir de él tan poco como se quiera, a este último se le denomina límite de todos los demás anteriores.

Definición 2.2. La función $f(x)$ es una función continua de la variable x entre dos límites asignados, si para cada valor de x entre esos límites, el valor numérico (absoluto) de la diferencia $f(x+a) - f(x)$ decrece indefinidamente con a. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos límites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la misma función.

Las definiciones anteriores difieren de las actuales, ya que no se definen en términos cuantificadores como: para todo, existe (en términos epsilon y delta), debido a que todavía no aparece toda el álgebra de la lógica. Además, se visualiza el uso de infinitesimales.

En la definición de continuidad, se observa el uso implícito de la noción de "intervalo". Además, esta definición no es puntual, sino que se está considerando la definición de continuidad uniforme.

Del mismo modo, aborda el concepto de integral desde la noción de límite, en contra de lo habitual durante la época de Cauchy. Alrededor del siglo XVIII, el concepto integral consistía en considerar la integración como el proceso inverso de la diferenciación. Esta forma de enfocar la integración había tropezado con grandes dificultades, pues no siempre era posible encontrar la función primitiva. Ya Euler reconocía las limitaciones de semejante concepción de la integral, y escribía, cuando no conseguía encontrar la primitiva de una función: "...no nos queda otra cosa que tratar de encontrar para ella un valor tan próximo al verdadero como se quiera" y esta idea de resolver el problema por la vía de la aproximación es la que sugiere a Cauchy su forma de definir la integral. Cauchy define la integral definida así:

"sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua respecto a la variable x. Sea $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, es decir, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, y define la norma de la partición P como el número

$$\Delta(P) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

La suma de Cauchy, asociada a f y una partición P, está definida por,

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}).$$

La suma S posee un límite cuando la norma de P se aproxima a 0, la cual es llamada la definición integral, y denotada por $\int_a^b f(x)dx$" (ver [8]).

En el trabajo de Cauchy se visualiza que él demostró la existencia de la integral, más no se preocupó por calcular el valor de la integral. A continuación veremos con detalle lo anterior, para ello es fundamental tener en cuenta los siguientes resultados:

Teorema 2.3. *Sean las cantidades:* $a_0, a_1, \cdots, a_n$; $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *entonces:*

$$\frac{\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n}{\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n} = M\Big[\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\Big],$$

donde $M[\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n]$ *es una cantidad tal que:*

$$A < M[\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n] < B$$

y

$$A = \min\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}, \quad B = \max\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}.$$

Corolario 2.4. *Si suponemos:* $b_0 = b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, *entonces:*

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) M[a_0, q_1, \cdots, a_n].$$

2.1. Demostración de existencia de la integral por Cauchy

Cauchy parte de $y = f(x)$ continua entre los límites $x = x_0$ y $x = X$. Tomando la partición $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = X$, se puede definir la siguiente suma:

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}), \tag{1}$$

donde S dependerá del modo de división entre los límites dados y del número n.

Si no se divide el intervalo, se obtiene un rectángulo y, consideramos:

$$S = (X - x_0) f(x_0). \tag{2}$$

Si tomamos la suma anterior (1) y se usa el corolario de las medias:

$$\begin{aligned}S &= (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \\ &= [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})]f(X') \\ &= (X - x_0)f(X'),\end{aligned}$$

dónde .

$$f(X') = M[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})].$$

Cauchy elige una nueva variable θ, *para correr los distintos valores de la "partición"del intervalo:*

$$f(x_0 + \theta(X - x_0)), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Con lo anterior, Cauchy quiere encontrar $f(X')$ en términos de $f(x_0 + \theta(X - x_0))$, $0 \leq \theta \leq 1$. Para ello, utiliza el teorema del valor intermedio para integrales.

Entonces S se puede escribir de la siguiente manera, teniendo en cuenta lo anterior:

$$S = (X - x_0)f(x_0 + \theta(X - x_0)), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Ahora se hace la misma división a cada uno de los siguientes subintervalos:

$$\begin{aligned}&\text{En} \quad [x_0, x_1] \to (x_1 - x_0)f(x_0 + \theta_0(X - x_0)), \quad 0 \leq \theta_0 \leq 1. \\ &\text{En} \quad [x_1, x_2] \to (x_2 - x_1)f(x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)), \quad 0 \leq \theta_1 \leq 1. \\ &\vdots \\ &\text{En} \quad [x_{n-1}, X] \to (X - x_{n-1})f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})), \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 1.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}S = &(x_1 - x_0)f(x_0 + \theta_0(X - x_0)) + (x_2 - x_1)f(x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)) \\ &+ \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})).\end{aligned}$$

Pero, por la continuidad de la función,

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_0)f(x_0 + \theta_0(X - x_0)) = f(x_0) \pm \epsilon_0, \\ &f(x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)) = f(x_1) \pm \epsilon_1, \\ &\vdots \\ &f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})) = f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1},\end{aligned}$$

y

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - n_{n-1})(f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}).$$

Desarrollando los productos:

$$\begin{aligned}S = &(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \epsilon_0 + (x_1 - x_0) \\ &\pm \epsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \epsilon_{n-1}(X - x_{n-1}) \\ = &(X - x_0)M[\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1}].\end{aligned}$$

De esta manera se llega a las siguientes ecuaciones:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

y

$$\begin{aligned}S = &(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) \\ &+ \cdots + (X - n_{n-1})f(x_{n-1}) + [(X - x_0)M(\epsilon_0, \epsilon_1, \cdots, \epsilon_{n-1})].\end{aligned}$$

Nota 2.5. *En general en esta demostración Cauchy primero toma un "intervalo" y lo divide en n partes y, luego nuevamente divide cada subintervalo en n partes y continua realizando el mismo proceso. Como el número de divisiones se hace muy grande y cada intervalo muy pequeño, podemos garantizar la continuidad de la función.*

De esta manera, si se tienen dos sumas parciales s_1 y s_2, como las anteriores, podemos tomar una partición más fina que las anteriores, s_3, tal que, esas sucesiones de sumas parciales satisfacen la condición de Cauchy. Es decir, el objetivo de Cauchy es verificar que la sucesión de sumas parciales de la partición de f (una función continua) cumplen con la condición de Cauchy y con ello, concluir que la sucesión de sumas parciales es convergente y, el valor al que converge dichas sumas es la integral definida.

3. La integral de Riemann

Cuando Riemann pasó al estudio de las series de Fourier en su tesis vio la necesidad de hacer algunas aclaraciones importantes sobre la integración antes de abordar el problema principal, es decir, la representatividad de funciones por trigonometría de series. En un apartado de su tesis definió la integral definida y la integral impropia, y dio las condiciones necesarias y suficientes para la integrabilidad. Luego dio un ejemplo de una función integrable que es discontinua en un número infinito de puntos, mostrando así que la continuidad es una condición suficiente para la integrabilidad, y está lejos de ser necesaria.

Riemann había estudiado con Dirichlet en la universidad de Gotinga y fue Dirichlet quien llamó la atención sobre funciones que eran discontinuas en un conjunto denso de puntos y al problema de extender el concepto de integral a este tipo de funciones. A continuación veremos el contexto histórico (conexiones entre el análisis y la teoría de números), y los resultado que llevaron a Riemann a extender el concepto de integral.

Desde el siglo XVIII se buscaba el valor a la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, con $s>1$ (si $s\leq 1$, tenemos que la serie es armónica y por ende, no es convergente). Euler en 1749 llega al resultado conectando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, con $s>1$, con el conjunto de números primos. Él sigue el siguiente procedimiento:

Considera, $\zeta(S)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, luego,

$$\zeta(S)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \tag{1}$$

Multiplicando las expresiones por $\frac{1}{2^s}$:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(S)=\frac{1}{2^s}\Big[1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots\Big]=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots \tag{2}$$

Restando (2) de (1):

$$\zeta(S)-\frac{1}{2^s}\zeta(S)=\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)\zeta(S)=1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots, \tag{3}$$

se anulan todos los múltiplos de 2. Multiplicamos (3) por $\frac{1}{3^s}$:

$$\frac{1}{3^s}\Big[\zeta(S)-\frac{1}{2^s}\zeta(S)\Big]=\frac{1}{3^s}\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)\zeta(S)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\cdots \tag{4}$$

(Obsérvese que quedan los múltiplos de 3 que no son múltiplos de 2).

Restemos (4) de (3):

$$\Big(1-\frac{1}{3^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)\zeta(S)=1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\cdots, \tag{5}$$

se han sacado múltiplos de 2 y 3. Si se continúa el proceso:

$$\frac{1}{5^s}\Big(1-\frac{1}{3^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)\zeta(S)=\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\frac{1}{35^s}+\frac{1}{55^s}+\cdots \tag{6}$$

Restando (6) de (5):

$$\Big(1-\frac{1}{5^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{3^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)\zeta(S)=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\cdots$$

(en este proceso se van cribando los números primos: aquí aparecen los números que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 ni de 5). Si se continúa con este proceso hasta el infinito:

$$\cdots\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(S)=1.$$

Por lo tanto,

$$\zeta(S)=\frac{1}{\cdots\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)}=\prod_{p\in P}\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Posterior al resultado anterior, Legendre en 1808 y Gauss en 1798 plantearon lo que hoy se conoce como el Teorema de los números primos. Además, Riemann planteó su famosa hipótesis de Riemann.

A raíz de resultados como los anteriores, Riemann pudo extender el concepto de integral. A continuación es pertinente plantear la definición de integral planteada por Riemann, como también sus condiciones:

Una función f es definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ es integrable si la suma:

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

converge a un límite determinado, para cada $t\in[x_{i-1}, x_i]$ con

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Este límite constituye por definición:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Antes presentar los criterios de suficiencia para que una función sea integrable, considere:

Sea una función f definida y acotada en $[a, b]$ y sea $P=\{a=x_0, x_1,\cdots, x_n=b\}$ una partición de $[a, b]$.

La norma de P se define:

$$\|P\|=\max\{x_1-x_0, x_2-x_1,\cdots, x_n-x_{n-1}\}.$$

La oscilación de f en $[a, b]$:

$$\omega_f=\sup f-\inf f,$$

donde:

$$\sup f=\sup\{f(x) : x\in[a, b]\},$$
$$\inf f=\inf\{f(x) : x\in[a, b]\}.$$

En este punto, se está en un momento clave de la historia de las matemáticas, ya que empiezan a emerger funciones "extrañas", como por ejemplo sucesiones de funciones continuas que convergen a funciones discontinuas, funciones que ya no son posibles representarse geométricamente, funciones que son integrables con un número denso de discontinuidades.

4. La integral de Lebesgue

Si uno mira ahora hacia atrás en la definición de integral de Riemann y su fórmula original del criterio de integrabilidad, la noción de longitud ordinaria parece ser central en la generalización de la integral de Riemann. Pero pasaría algún tiempo hasta que los desarrollos de la teoría de la medida estuvieran vinculados con la noción de integral definida.

Cantor introdujo una primera noción de medida que, sin embargo, todavía estaba disociada del concepto de integral definida. Su trabajo pionero en la teoría de conjuntos fue de hecho el que la desencadenó. Cantor en sus estudios sobre las series de Fourier, se interesó en encontrar la posibilidad de evaluar "qué tan grande" es un conjunto particular, en otras palabras, para encontrar una medida para conjuntos. Pero su enfoque fue principalmente topológico, geométricamente no estaban involucradas longitudes o áreas intuitivas, y al final él propuso la medición de conjuntos en términos de cardinalidad.

Henri Lebesgue es generalmente conocido como el creador de la teoría moderna de la medida y la integración. La primera exposición detallada de la nueva noción de medida e integral aparecen en su tesis doctoral de 1902, *Intégrale, longueur, aire* (ver [6]). En su tesis, Lebesgue plantea el problema de la medida, que consiste en encontrar una medida que cumpliera con las siguientes propiedades:

Se denota por $m(E)$, una medida no negativa en algunos subconjuntos acotados $E \subset \mathbb{R}$ tiene que satisfacer lo siguiente:

(1) $m(E) \neq 0$ para algún E.

(2) $m(E + a) = m(E)$ para cada número real a

(3) si E_n son disjuntos por pares, para $n = 1, 2, 3, \cdots$, entonces

$$m\Big(\bigcup_{n\geq 1} E_n\Big) = \sum_{n\geq 1} m(E_n).$$

(1) requiere que $m(E)$ no sea idénticamente cero, (2) es la invarianza de traslación, mientras que condición (3) es la aditividad contable.

Suponiendo que el problema anterior tiene solución, Lebesgue tomó como unidad de medida un intervalo. Entonces, cualquier intervalo va a tener una medida y, la definió así:

$$m((a, b)) = b - a.$$

Además, cualquier conjunto que sea la unión (acotada) de una colección contable de intervalos disjuntos dos a dos $(I_n)_n$ también tiene medida y se define así:

$$m\Big(\bigcup_{n\geq 1} I_n\Big) = \sum_{n\geq 1} m(I_n).$$

A lo largo de su tesis, Lebesgue, como Borel, a quien a menudo cita, trabaja con aquellos conjuntos que pueden escribirse como uniones contables de intervalos disjuntos por pares que no son necesariamente abiertos (en comparación con el enfoque moderno donde los conjuntos de Borel que son "generados"por conjuntos abiertos).

Todo lo anterior sugirió que si $m(E)$ cumple las condiciones del problema de la medida, entonces su valor debería ser menor que $\sum_{n\geq 1} l(I_n)$, donde $E \subset \cup_{n\geq 1} I_n$, y $l(I)$ denota la longitud del intervalo I. Así, Lebesgue propuso la siguiente definición de medida:

$$m_e(E) = \text{ínf}\{m(G) \,:\, E \subset G - \text{abierto}\},$$

$m_e(E)$ se define como la medida exterior de E.

$$m_i(E) = \sup\{m(G) \,:\, F \subset E - \text{cerrado}\},$$

$m_i(E)$ se define como la medida interior de E. Lebesgue usó los términos medida exterior y medida interior, para definir cuando un conjunto es medible, así:

Se dice que el conjunto es medible si $m_i(E) = m_e(E)$, el valor común siendo la medida de E.

Con esta definición, Lebesgue pudo demostrar que cada conjunto de Borel es medible.

A continuación, Lebesgue pasa al problema de la integración a través del concepto de medida de funciones. Comienza con la siguiente caracterización geométrica de la integral en términos de medida de conjuntos: si E es medible,

$$\int_a^b f(x)dx = m(E^+) - m(E^-),$$

donde a, b son números reales y E^+ y E^- son los conjuntos planos delimitados por la gráfica de f y que se encuentran arriba y debajo del eje x, respectivamente, y m denota su medida 2-dimensional. Lebesgue abandona el enfoque de sus predecesores de dividir el eje x, por este enfoque. Sin embargo, este proceso puede no funcionar para funciones que sean altamente discontinuas.

Para ello, divide el rango de la función, en lugar de su dominio. Es decir, si $f \geq 0$ se define en $[a, b]$,

$$\underline{f} = \text{ínf}(f(x)), \quad \overline{f} = \sup(f(x))$$

sea

$$P \, : \, \underline{f} = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \overline{f},$$

una partición arbitraria del intervalo $[\underline{f}, \overline{f}]$ y considerar los conjuntos

$$E_k = \{t \in [a, b] \, : \, y_k \leq f(t) \leq y_{k-1}\}.$$

Cada uno de estos conjuntos se compone de una unión de intervalos, y dividen el dominio $[a, b]$. Entonces, si es la región limitada por la gráfica de f, el (plano) la medida de E, $m(E)$ se encuentra entre las sumas:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k m(E_k), \quad \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m(E_k),$$

es decir, $\int_a^b f = m(E)$ se encuentra entre estas dos cantidades. Estas sumas tienen un límite en común a medida que la norma de P se acerca a 0 y Lebesgue toma este número como la definición para la integral.

$$\int_a^b f = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} m(E_k) = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} y_k m(E_k).$$

El argumento que justifica la existencia del límite común para dos particiones cualesquiera, es que la diferencia entre las dos sumas se puede hacer arbitrariamente pequeño al restringir las longitudes de los subintervalos formados por las dos particiones.

5. El falso teorema de Cauchy

De acuerdo con datos históricos el matemático noruego N. H. Abel (1802-1829) en la década de 1820 planteó nuevos e impresionantes resultados. Aunque su enfoque matemático se ocupaba principalmente de cuestiones algebraicas, en particular las relacionadas con funciones elípticas y trascendentales superiores, Abel también produjo una nueva demostración del teorema del binomio, este teorema representó un papel importante en los intentos de Euler, Lagrange, Cauchy, para la fundamentación del análisis.

El interés de Abel en el teorema del binomio fue despertado por el Cours d'analyse de Cauchy de 1821 ([2]), en el que Cauchy construyó una teoría de series infinitas basada en un nuevo estándar de rigor. Aspirando a generalizar la demostración de Cauchy del teorema del binomio para incluir exponentes complejos, Abel estableció su investigación partiendo de su lectura del trabajo de Cauchy. En el proceso, sin embargo, Abel vio que uno de los teoremas centrales de Cauchy (sobre la continuidad de cualquier suma convergente de funciones continuas) tenía un contraejemplo. Él afirmó lo siguiente:

Cuando los diferentes términos de la serie:

$$u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$$

son funciones de una misma variable x, continuas con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular para el cual la serie es convergente, la suma s de la serie es también, en la vecindad de este valor particular, una función continua de x. Sin embargo, me parece que este teorema admite excepciones. Así, por ejemplo, la serie

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{3}\sin(3\varphi) - \cdots$$

es discontinua para cada valor x en $(2m+1)\pi$ donde m es un número entero. Como es bien sabido, existen multitud de series con similares características (ver [1]).

En resumen, Abel encontró un contraejemplo para el resultado de Cauchy y, fue en este contexto de la demostración de Cauchy sobre el teorema del binomio y el teorema sobre la continuidad infinita de funciones continuas que Abel basó su crítica. Para detallar la crítica de Abel primero veamos la demostración de Cauchy:

Sea $\sum f_n(x)$ una serie convergente de funciones continuas y para cualquier n, defínase

$$s_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f_m(x), \quad r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} f_m(x).$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$

1. Hay un δ tal que, para cualquier b, si $|b| < \delta$, entonces $|s_n(x+b) - s_n(x)| < \epsilon$.
2. Hay un N tal que $|r_n(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.
3. Hay un N^* tal que $r_n(x+b)| < \epsilon$, para todo $n \geq N^*$.

Conclusión:

$$\begin{aligned} |f(x+b) - f(x)| &= |s_n(x+b) + r_n(x+b) - s_n(x) - r_n(x)| \\ &\leq |s_n(x+b) - s_n(x)| + |r_n(x+b)| + |r_n(x)| \\ &\leq 3\epsilon, \quad \text{para todo} \quad b < \delta. \end{aligned}$$

En lo anterior podemos detallar que Cauchy introduce la notación $s = s_n + r_n$, donde s_n denota la suma de los primeros n términos de la serie, y r_n denota la cola correspondiente de la serie. Luego argumentó que el aumento de $s_n(x+b)$ sobre $s_n(x)$ era infinitamente pequeño para b infinitamente pequeño (por la continuidad de s_n), y que $r_n(x+b)$ y $r_n(x)$ desaparecieron juntos (como colas de la serie). Por tanto, la suma era una función continua.

Formulado en términos modernos,

$$\begin{gathered} s = s_n + r_n, \\ r_n(x+b) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \\ r_n(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty, \end{gathered}$$

y

$$s_n(x+b) - s_n(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad b \to 0.$$

Por lo tanto,

$$s(x+b) - s(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad b \to 0.$$

En términos modernos, este argumento no es válido porque los dos procesos límite ($b \to 0$ y $n \to \infty$) no son independientes. Sin embargo, Cauchy no tenía medios para separar simbólicamente los procesos límite, y su argumento tuvo imprecisiones. De hecho, con la interpretación estándar (que se resolvió en parte por la lectura de Cauchy de Abel), estos procesos estaban realmente interrelacionados, pero ni Cauchy ni Abel tenían las herramientas suficientes para superar este inconveniente. Después, hicieron esfuerzos para idear nuevos conceptos, incluida la convergencia uniforme que aclara la situación.

Con lo anterior, Abel expresó la necesidad de realizar una revisión crítica de la teoría de series y sabía que confrontar la validez de esta teoría era difícil de aceptar para los matemáticos de la época, debido a que esas "verdades" estaban muy arraigadas. Además, observó que las series trigonométricas pueden proporcionar la clave para probar las verdades y principios aceptados, como lo es el caso del teorema anterior.

En conclusión Abel quería reformular la teoría de la serie de Cauchy de una manera ligeramente diferente, óptima para la demostración del teorema del binomio. En este proceso, reemplazó el teorema sobre la continuidad infinita de funciones continuas con otro resultado, debido a que el teorema propuesto por Cauchy presentaba "inconvenientes". Pero, más tarde con el trabajo influyente de Lakatos sobre *Proofs and Refutations,* publicado por primera vez en el British Journal of Philosophy of Science en cuatro partes entre 1963 y 1964 ([5]), se introdujo el método de pruebas y refutaciones, con el cual Lakatos deja entrever la heurística del falso teorema de Cauchy y con ellos demuestra que Cauchy no estaba equivocado sino que su trabajo estaba manejando la noción de lo que actualmente se conoce como continuidad uniforme.

Acknowledgments. A. Corredor fue apoyada por la Universidad del Cauca. R. Córdoba fue apoyado por la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Abel, N. (1826), Untersuchungen über die Reihe: u.s. w. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1, 311-339. 27

[2] Cauchy, A. (1821), Cours dánalyse, Vol. 4, pp 378-380. Ouvres. Note III, Series 2. 21, 27

[3] Cauchy, A. (1823), Résumé des leçons données à l´École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Paris, Imprimerie royale. 21

[4] Cauchy, A. (1829), Leçons sur le calcul différentiel. Paris: Gauthier-Villars. 21

[5] Lakatos, I. (1978), Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático. (Introducción y selección de John Worral y Elie Zahar; versión española de Carlos Solís) Madrid: Alianza Editorial. 28

[6] Lebesgue, H. (1902), Intégrale, Longueur, Aire. Annali di Matematica, Serie III 7, 231-359. 26

[7] Newton I. (1687). Philosophiae naturalis principia mathematica. Londres: Apud Guil. Joh. Innys. 20

[8] Recalde, L. (2019), Lecturas de historia de las matemáticas. Cali, Universidad del Valle. 22