Jácome, Mosquera y Soto 2024. Construcción, con herramientas no convencionales, de un triángulo isósceles dado el perímetro y la altura relativa al lado desigual. Revista Sigma, 20(1). Páginas. 30-39

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XX № 1 (2024), páginas 30–39

Construcción, con herramientas no convencionales, de un triángulo isósceles dado el perímetro y la altura relativa al lado desigual.

Jácome, Libardo Manuel [1]
Mosquera López, Saulo[2]
Soto Ágreda, Oscar Fernando [3]

Abstract: Geometric construction problems with ruler and compass have been a source of work and inspiration for mathematicians throughout the ages, although it is also possible to use other kinds of instruments, see, for example, Boyer, 1968. In this work the following question is analyzed: Is it possible to construct an isosceles triangle, given its perimeter and the height relative to the unequal side, with non-conventional tools, that is, without the use of the ruler and the compass? The answer is positive and its solution uses curves such as the parabola, the ellipse and the hyperbola, although it is also possible to use other types of curves. Additionally, each of the constructions is justified from a theoretical point of view.

Keywords. Problem, isosceles triangle, ellipse, hyperbola, parabola, bisector, circle, line.

Resumen: Los problemas de construcciones geométricas con regla y compás han sido fuente de trabajo e inspiración para los matemáticos a través de los tiempos, aunque también es posible utilizar otra clase de instrumentos ver, por ejemplo, Boyer, 1968. En este trabajo se analiza el siguiente interrogante: ¿Es posible construir un triángulo isósceles, dado su perímetro y la altura relativa al lado desigual, con herramientas no convencionales, es decir, sin el uso de la regla y el compás? La respuesta es positiva y en su solución se utilizan curvas tales como, la parábola, la elipse y la hipérbola, aunque también es posible utilizar otro tipo de curvas. Adicionalmente, cada una de las construcciones se justifica desde el punto de vista teórico.

Palabras Clave. Problema, triángulo isósceles, elipse, hipérbola, parábola, mediatriz, circunferencia, recta.

[1]Especialista en la enseñanza de la Matemática de la Universidad de Nariño. Correo institucional: Email: elo@udenar.edu.co

[2]MSc en Matemáticas, Universidad del Valle, Profesor Pensionado Universidad de Nariño. Correspondencia: Urb. Sumatambo Manzana 19 Casa 5A. Email: samolo@udenar.edu.co

[3]MSc en Enseñanza Problémica, Universidad del Jorge Tadeo Lozano, Profesor Universidad de Nariño. Correspondencia: Terrazas de Pinasaco 1 casa 5b Email: fsoto@udenar.edu.co

1. Introducción

Cuando se planea resolver un problema a través de una construcción geométrica, de manera tácita se asume que solo se debe utilizar la regla y el compás a la usanza clásica, pero, asumiendo otras herramientas, perfectamente se pueden combinar métodos y atacar el problema, por ejemplo, usando las cónicas como instrumentos de trabajo, es decir, como instrumentos físicos que viabilizan la solución sin asegurar que por usar estas curvas el problema sea más fácil o la solución propuesta no sea correcta.

En este artículo se presentan diversas soluciones del siguiente problema: construir un triángulo isósceles si se conocen su perímetro y la altura referida al lado desigual. Al usar diferentes estrategias y herramientas hay mayor riqueza y goce estético con la posibilidad de contemplar la belleza de las matemáticas en la construcción de sus conceptos y teorías y, además, aunque el problema tenga solución con regla y compás (plan a), también pueden existir otros caminos, y aparecen planes b, c, d, etc., que enriquecen de manera heurística, el planteamiento del problema. Para el caso considerado la estrategia básica de solución está en ubicar un único punto sobre el segmento que determina el perímetro, punto que es una especie de bisagra en la configuración del triángulo isósceles que exige el problema.

El desarrollo de este documento sigue el siguiente plan de trabajo: en la sección 2, se presenta de manera formal el problema y algunas consideraciones sobre su solución, en la sección 3, se consideran nueve métodos de solución cada uno de los cuales desarrolla la estrategia básica comentada en el párrafo anterior y se justifica teóricamente cada uno de ellos, de la misma manera se consideran algunas observaciones sobre la solución del problema. Las soluciones consideradas utilizan curvas como la recta y la circunferencia, pero también se recurre a las cónicas. En los casos de la recta, parábola y circunferencia, parece que existe una única solución, no se aborda el problema de unicidad y en la construcción final se advierte la forma en que infinitas hipérbolas y elipses resuelven el problema.

El artículo finaliza con una sección de conclusiones donde se realizan algunas consideraciones en las cuales se plantea la posibilidad de resolver el problema utilizando otras estrategias, así como la importancia de considerar el uso de la mediatriz como una herramienta útil en la solución de problemas geométricos.

2. El problema

El problema que consideramos es el de construir un triángulo isósceles dado su perímetro y la altura relativa al lado desigual. Este problema tiene una solución con regla y compás, que describimos más adelante, sin embargo, nuestro objetivo básico es el de resolverlo con otro tipo de instrumentos. De manera formal el problema es el siguiente:

Dado un segmento $\overline{PQ}$ de longitud p y un segmento $\overline{AB}$ de longitud h, perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ en su punto medio B, construir un triángulo isósceles que tenga como perímetro p y altura h.

La figura 1, ilustra el problema y para para llevar a efecto la construcción se debe tener en cuenta que se debe cumplir la condición, $AB < p/2$.

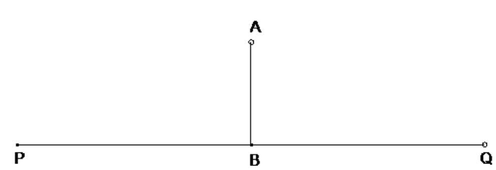

Figura 1: Los elementos constitutivos del problema

3. Diversas soluciones al problema

Presentamos en esta sección diversos métodos de solución al problema, una de ellas corresponde a la solución euclidiana y las demás utilizan como curvas básicas de solución la recta, la circunferencia y las diferentes cónicas.

3.1. Un camino que asombra.

La gráfica 2 describe en esencia el problema planteado, de ella se deduce que tiene única solución. En esta se ha ubicado el circuncentro X del triángulo AQM donde Q es el punto que determina y modifica el perímetro, A es el punto que permite modificar la altura y M un punto libre en el plano. La construcción satisface las condiciones de existencia de la solución en el sentido de que la altura debe ser menor que la mitad del perímetro.

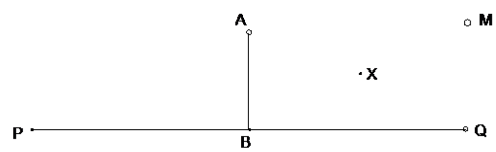

Figura 2: Una primera solución del problema

Al disponer "traza" al circuncentro X y desplazar el punto M por el plano de manera libre, ver figura 3, se aprecia que X limita su recorrido a una línea recta.

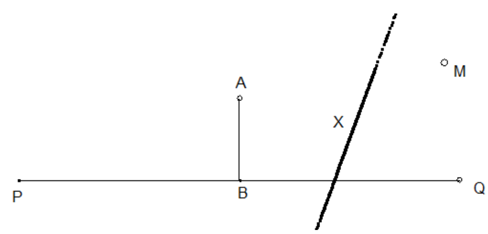

Figura 3: Solución con M de camino arbitrario

Esto sugiere que el punto M se puede sujetar a recorridos fijos como una recta o una circunferencia o una elipse y el lugar geométrico, que en ese caso determine el punto X corta al segmento $\overline{PQ}$ justo en el punto que consigue resolver el problema.

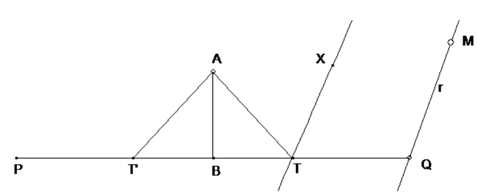

Figura 4: Solución que recurre a la mediatriz

En efecto, sobre cualquier recta que pase por Q y que se ha denominado r se ubica el punto M. Si X es el circuncentro del triángulo AMQ; el lugar geométrico descrito por X cuando M recorre la recta r es una recta que localiza el punto T en el segmento $\overline{PQ}$ que determina el perímetro. Con esto se tiene la solución del problema.

3.2. Construcción utilizando la mediatriz.

Consideremos la figura 5. Se traza el segmento $\overline{AQ}$ y luego su mediatriz que corta al segmento $\overline{PQ}$ en T. Con centro en A y radio AT se traza una circunferencia que corta al segmento $\overline{PQ}$ en un punto T', que es el simétrico de T respecto de B. En estas condiciones $T'TA$ es el triángulo requerido, ya que:

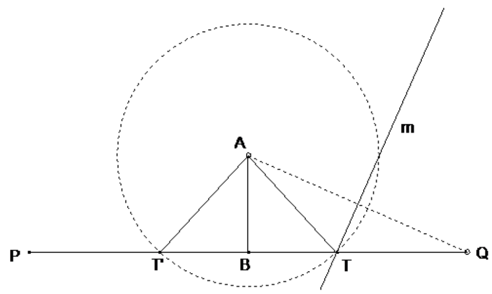

Figura 5: Solución a través de la mediatriz

El triángulo $T'TA$ es isósceles por construcción. Ahora $TA = TQ$ por ser T un punto de la mediatriz y el perímetro de este triángulo es,

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$$

Obsérvese que esta construcción corresponde a una solución Euclidiana del problema.

3.3. Construcción utilizando el circuncentro.

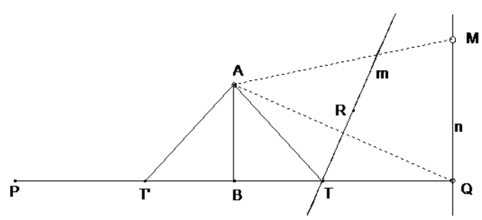

Figura 6: Solución utilizando el circuncentro

Consideremos la figura 6. Se traza por Q la recta n perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ y se toma en esta recta un punto móvil M. Se considera el triángulo MAQ y su circuncentro R. Cuando el punto M se mueve sobre la recta n el punto R genera un lugar geométrico, en este caso la recta m, que coincide con la mediatriz de $\overline{AQ}$ ya que R equidista de A y Q. Esta recta corta al segmento $\overline{PQ}$ en un punto T y con centro B y radio BT se traza una circunferencia cuya intersección con el segmento $\overline{PQ}$ es un punto T'.

El triángulo $T'TA$ es el triángulo deseado ya que es isósceles por construcción y puesto que el punto T está sobre la mediatriz del segmento $\overline{AQ}$ se tiene $TA = TQ$ y así el perímetro del triángulo $T'TA$ es

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$$

3.4. Construcción utilizando la elipse.

Consideremos la figura 7, con centro en B y radio BP se traza una circunferencia, en ella se toma un punto libre M, se trazan los segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ y se construye la mediatriz m de $\overline{AM}$. Sea S el corte de m con $\overline{BM}$, entonces $SM = SA$ ya que S que está la mediatriz de $\overline{AM}$.

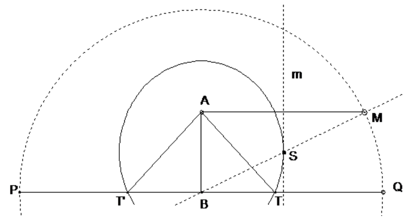

Figura 7: Solución usando la elipse

$BM = BQ = \dfrac{p}{2}$ por construcción, lo que implica que $BM = BS + SM = BS + SA$, es decir, $BS + SA = \dfrac{p}{2}$, lo que significa que, al mover M el lugar geométrico generado por S es una elipse con focos A, B y eje mayor de longitud BQ, (Lehmann, 1963), que corta al segmento $\overline{PQ}$ en los puntos T y T'.
En estas condiciones el triángulo $T'TA$ es el triángulo pedido ya que $BT = BT'$ por ser T y T' puntos simétricos de la elipse y puesto que $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ son perpendiculares se sigue que los ángulos TBA y $T'BA$ son congruentes y dado que el segmento $\overline{AB}$ es común a los triángulos TBA y $T'BA$ entonces estos triángulos son congruentes y por tanto $AT = AT'$.
Como T es un punto de la elipse entonces $BT + TA = \dfrac{p}{2}$ y $BT + TQ = \dfrac{p}{2}$ y se sigue que $BT + TA = BT + TQ$, es decir, $TA = TQ$ y el perímetro del triángulo $T'TA$ es:

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Por extraño que parezca, existen infinitas elipses que resuelven el problema.

3.5. Construcción utilizando la parábola.

Consideremos la figura 8. Por Q se traza la recta l perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ y en ella se toma un punto libre M, por el que se traza una recta n perpendicular a l. Se considera el segmento $\overline{AM}$, su mediatriz m que corta a n en el punto R, entonces $RA = RM$ ya que R está en la mediatriz del segmento $\overline{AM}$.
El punto A y la recta l son fijos entonces R es un punto de la parábola con foco en A y directriz l, que se genera cuando el punto M se mueve a lo largo de la recta l. Esta parábola corta al segmento $\overline{PQ}$ en T y con centro B y radio AT se traza una circunferencia que intercepta a $\overline{PQ}$ en T'.

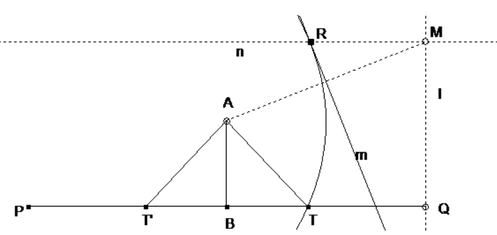

Figura 8: Solución usando la parábola

El triángulo pedido es ATT' ya que el triángulo ATT' es isósceles por construcción y puesto que $TA = TQ$ por ser T un punto de la parábola, entonces el perímetro de este triángulo es:

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$$

3.6. Construcción utilizando la hipérbola.

Consideremos la figura 9. Se traza la circunferencia con centro B y radio BA que corta necesariamente a $\overline{PQ}$ en un punto R ya que $AB < \dfrac{p}{2}$. Se considera la circunferencia de centro R y radio

RQ y en esta circunferencia se considera un punto móvil M y se construyen la recta $n = \overleftrightarrow{MR}$, el segmento $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en un punto X y en consecuencia $XA = XM$.
Puesto que X, R y M son colineales $XM = XR+RM$ es decir $XM-XR = RM$ y como $XM = XA$ entonces $XA - XR = RM = \dfrac{p}{2} - h = s$, es una cantidad constante.
Lo anterior significa que el lugar geométrico que genera X al mover el punto M es una la hipérbola de focos A y R y longitud del eje transverso $RM = \dfrac{p}{2} - h$, (Lehmann, 1963), la cual intercepta al segmento $\overline{PQ}$ en un punto T. Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta al segmento $\overline{PQ}$ en T'.

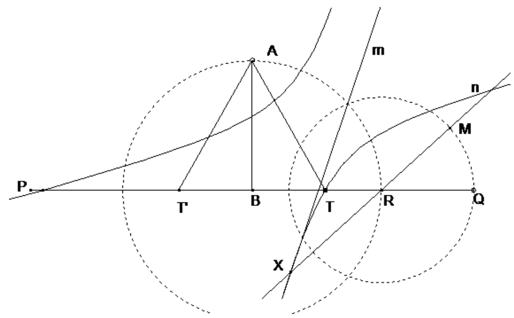

Figura 9: Solución usando la hipérbola

En estas condiciones el triángulo deseado es el triángulo ATT' ya que es isósceles por construcción y como T es un punto de la hipérbola se tiene: $TA-TR = RM = RQ$ de dónde $TA = TR+RQ = TQ$.
De nuevo se tiene que el perímetro del triángulo ATT' es:

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

En este punto también hay que advertir que infinitas hipérbolas solucionan este problema de construcción.

3.7. Construcción utilizando la circunferencia.

Consideremos la figura 10. Sea M el punto medio del segmento $\overline{AQ}$ y se construye la circunferencia determinada por los puntos A, B y M que corta al segmento $\overline{PQ}$ en el punto T y con centro B y radio BT se traza una circunferencia que corta a $\overline{PQ}$ en el punto T'.

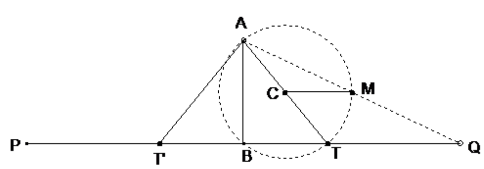

Figura 10: Solución usando la circunferencia

En estas condiciones el triángulo pedido es ATT' ya que es isósceles por construcción y puesto que $m\angle(ABT) = \frac{1}{2}m\angle(AMT)$ (de Jesús Landaverde, 1987) y $m\angle(ABT) = 90°$ (Guerrero, 2002), se sigue que $m\angle(AMT) = 180°$.
Esto significa que $\overline{AT}$ es diámetro de la circunferencia y si el punto C es el centro de la circunferencia construida anteriormente entonces los segmentos $\overline{CM}$ y $\overline{TQ}$ son paralelos (de Jesús Landaverde, 1987) y por el recíproco del teorema de Thales los triángulos TQA y CMA son semejantes, por lo que, $\frac{TQ}{TA} = \frac{CM}{CA} = 1$ de donde $TQ = TA$.
Por lo que el perímetro del triángulo ATT' es,

$$T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$$

3.8. Una construcción especial

Supongamos que usando cualquiera de los métodos anteriores se ha encontrado el triángulo isósceles ATT' y consideremos un punto cualquiera O en el segmento $\overline{PQ}$. Con centro O y radio $\overline{OQ}$ se traza una circunferencia y en ella se considera un punto libre M, entonces pude suceder que:

- El punto O está a la derecha de T. Se traza la mediatriz m del segmento $\overline{AM}$ y la recta $\overleftrightarrow{MO}$ que corta a la mediatriz en el punto X y por consiguiente tenemos, la construcción en la cual el lugar geométrico, generado por X al mover el punto M es una hipérbola y por consiguiente aplica la misma demostración. Nótese que si se mueve el punto O conservándolo a la derecha de T se genera una familia de hipérbolas.

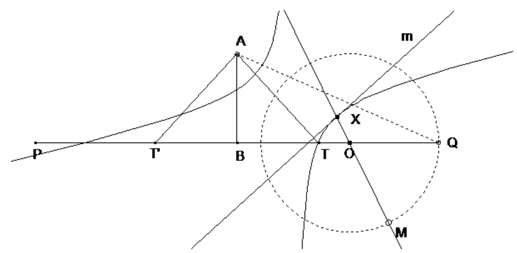

Figura 11: Caso general: infinitas hipérbolas y elipses

- Si O coincide con Q, la hipérbola se degenera en una recta, exactamente en la mediatriz m que corresponde al primer caso.

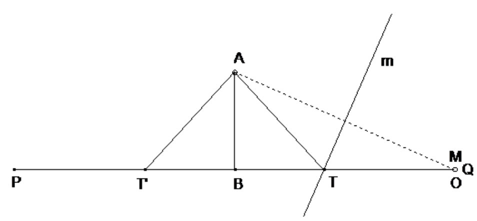

Figura 12: Retornando al uso de la mediatriz

- Si O está a la izquierda de T se presenta un caso análogo a la construcción que utiliza la elipse como lugar geométrico y por tanto la demostración es la misma. Nuevamente hay que anotar que al mover el punto O, conservándolo a la izquierda de T, se genera una familia de elipses.

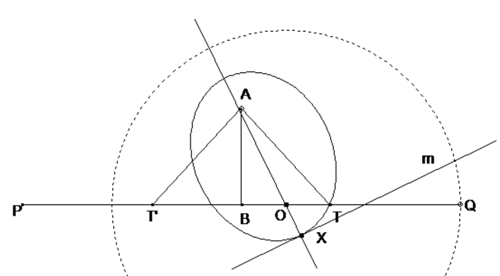

Figura 13: Retornando al caso de uso de la elipse

- Cuando O tiende a T por la izquierda la elipse se degenera en el segmento $\overline{AT}$
- Cuando O tiende a T por la derecha la hipérbola se degenera en dos rayos $(\overleftrightarrow{AT}-\overline{AT})\cup\{A,T\}$.

3.9. El caso de la elipse en coordenadas.

Consideramos un segmento $\overline{PQ}$ de longitud p sobre el eje x de manera que su punto medio B coincida con el origen de coordenadas y la altura AB, de longitud h, esté en el eje y. En estas condiciones las coordenadas de los puntos B, A, P, Q son, respectivamente, $(0,0)$, $(0,h)$, $(\frac{-p}{2},0)$, $(\frac{p}{2},0)$, la ecuación de la circunferencia de centro en B y radio $\frac{p}{2}$ es $x^2+y^2=(\frac{p}{2})^2$ y la curva que determina la solución del problema, ver sección 3.4 corresponde a una elipse de focos A y B que pasa por S, es decir, tiene como longitud del eje mayor $\frac{p}{2}$. Puesto que por definición una elipse es, *El lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una cantidad constante*, entonces la ecuación de esta curva se expresa como

$$d(S,A)+d(S,B)=\frac{p}{2}$$

es decir

$$\sqrt{(x^2+(y-h)^2)}+\sqrt{(x^2+y^2)}=\frac{p}{2}$$

expresión en la que eliminando los radicales se convierte en

$$(4h^2-p^2-8hy)^2=16p^2(x^2+y^2)$$

y completando cuadrados, la ecuación de la elipse cuya intersección con el segmento $\overline{PQ}$ determina el punto T, que resuelve el problema, se puede escribir como

$$16p^2x^2+16(p^2-4h^2)\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=p^2(p^2-4h^2).$$

El caso particular en el caso en que el perímetro es $p=10$ y la altura es $h=3$, se ilustra en la figura 14, para el cual la ecuación de la elipse es $25x^2+16\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=100$.

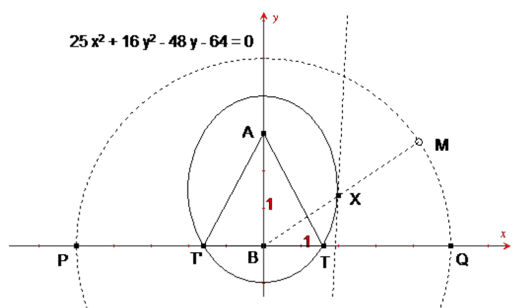

Figura 14: El problema en el contexto cartesiano

3.10. Dos observaciones adicionales.

Al iniciar el análisis de la solución del problema se ubicó de manera arbitraria un punto M en el plano del que se intuye que, en su recorrido, en algún momento coincide con Q. Como consecuencia de este hecho, se puede pensar que todos los caminos que pasen por Q y a los que se pueda sujetar el recorrido del punto M determina un lugar geométrico que se interseca con el segmento $\overline{PQ}$ posiblemente en varios puntos, pero que ubican al punto T, que resuelve el problema en consideración. Sin embargo, este hecho que, intuitivamente podría considerarse verdadero, en general, no lo es. Ilustramos a continuación un camino que resuelve el problema y otro en el que el punto de corte no es solución. Consideremos resuelto el problema y ubiquemos un punto libre F, entre T y Q entonces,

- Si se considera la parábola de foco el punto F que pasa por Q y sobre ella se ubica el punto libre M, entonces el lugar geométrico generado por el punto F al mover M, en la figura 15, en rojo, intercepta al segmento $\overline{PQ}$ en un punto que coincide con el punto T.

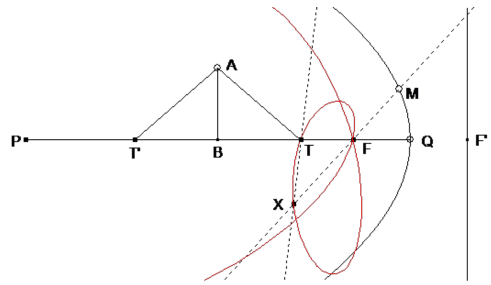

Figura 15: Un lugar geométrico que determina la solución.

- Si se considera como camino el perímetro de un cuadrado de lado el segmento $\overline{FQ}$ el lugar geométrico generado por el punto F al mover el punto M, en la figura 16 en rojo, interseca al segmento $\overline{PQ}$ en un punto U que no es solución del problema.

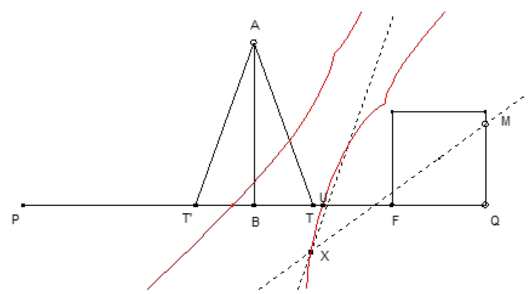

Figura 16: Un lugar geométrico que no determina una solución.

4. Conclusiones

En este trabajo se han desarrollado diversas soluciones del siguiente problema: Construir un triángulo isósceles del que se conoce su perímetro y la altura correspondiente al lado desigual. En las soluciones sean utilizado curvas euclidianas, como la recta y la circunferencia, así como curvas no consideradas en la geometría euclidiana, como las cónicas. En cada una de ellas se ha utilizado la mediatriz de un segmento como un elemento fundamental en la misma.

Un aspecto por considerar es el siguiente: ¿Es posible utilizar otra clase curvas, tales como, la espiral, la lemniscata, la cardiode u otras, para resolver el problema? De manera más general, ¿es posible caracterizar las curvas que resuelven el problema?

¿Estas construcciones son fortuitas, es decir, son fruto de un momento de iluminación o es cuestión de proponerse realizar una construcción y ponerse manos a la obra?

¿Se pueden considerar los casos 3, 4 y 5 como construcciones de la elipse, parábola e hipérbola?

La solución del problema resalta la importancia de la mediatriz como instrumento y vía que da apertura a las soluciones consideradas, hecho que se justifica de la siguiente manera. Si M es un punto arbitrario en el plano donde se ubica el problema y X es el circuncentro del triángulo AQM, la traza de X al arrastrar M por todo el plano, coincide con la mediatriz de los puntos A y Q. De modo que es suficiente con elegir de modo arbitrario en el plano, los puntos M y M' y calcular los circuncentros X y X' de los triángulos AQM y AQM' respectivamente; los puntos X y X' determinan una recta que intersecta en el punto T, al segmento PQ que cierra la solución del problema. De hecho, la recta $\overleftrightarrow{XX'}$ coincide con la mediatriz entre A y Q.

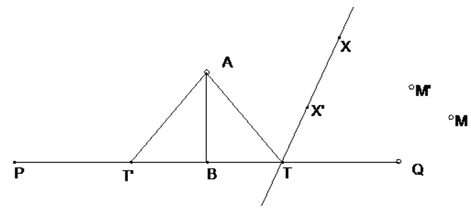

Figura 17: Solución con dos puntos que se mueven de modo arbitrario

Referencias

[1] Boyer, C. (1986), Historia de la matemática, (M. Martínez, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

[2] de Jesús Landaverde, F. (1987). Geometría. Editorial Progreso.

[3] Guerrero, A. (2002), Geometría plana y del espacio, Editorial Universidad Nacional. Bogotá.

[4] Lehmann, C. H. (1963). Geometría analítica. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.