Diaz e Hidalgo. 2024. Una vista sobre las cópulas y su aplicación en la creación y análisis de un portafolio de inversión. Revista Sigma, 20 (2). Páginas 43–55.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XX № 2 (2024), páginas 43–55

Una vista sobre las cópulas y su aplicación en la creación y análisis de un portafolio de inversión

Mónica Janeth Diaz Moncayo [1]

Lester Aarón Hidalgo Solarte [2]

Abstract: This paper explore one of the key applications of copulas, highlighting its importance in financial and risk modeling. Additionally, we will discuss how copulas can be used in combination with models like DCC-GARCH in R to improve forecast accuracy and risk management in finance. Ultimately, we will see how copulas offer a versatile and powerful approach to understanding and modeling the complex interaction between random variables in the financial scenario.

Keywords. Copula, Sklar's Theorem, stock market index, investment portfolio, DCC-GARCH.

Resumen: En este breve informe, exploraremos una de las aplicaciones clave de las cópulas, destacando su importancia en el modelado financiero y de riesgos. Además, discutiremos cómo se pueden utilizar cópulas en conjunción con modelos como el DCC-GARCH en R para mejorar la precisión de los pronósticos y la gestión del riesgo en el ámbito financiero. En última instancia, veremos cómo las cópulas ofrecen un enfoque versátil y poderoso para comprender y modelar la compleja interacción entre variables aleatorias en el escenario financiero.

Palabras Clave. Cópula, Teorema de Sklar, índice bursátil, portafolio de inversión, DCC-GARCH.

1. Introducción

El término cópula proviene del latín copulare, que significa conectar o unir. Fue usado por primera vez en el teorema de Sklar (1959), el cual ayuda a describir la interrelación de diversas variables aleatorias que no provienen necesariamente de distribuciones elípticas [2].

[1] Maestría en Estadística Aplicada, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Correo: mjdiaz23a@udenar.edu.co

[2] Maestría en Estadística Aplicada, Facultad Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Correo: lahidalgo@udenar.edu.co

En otras palabras, una cópula es una relación que combina las distribuciones marginales para formar una distribución conjunta [5].

Las cópulas matemáticas se han convertido en herramientas poderosas con una amplia variedad de aplicaciones en diversos campos, desde finanzas hasta meteorología y biología. Su capacidad para modelar la dependencia entre variables aleatorias de manera flexible las hace indispensables en la modelización y gestión de riesgos, así como en la diversificación de carteras, estudio del comportamiento de un portafolio y la predicción de fenómenos complejos [1]. En este contexto, las cópulas permiten capturar estructuras de dependencia no lineales o asimétricas que los métodos tradicionales como la correlación lineal no pueden abordar adecuadamente [3].

En este trabajo se pretende comprender el concepto de cópula en el ámbito estadístico, y cómo el teorema de Sklar proporciona una base teórica sólida para ello. También, reconocer la estructura de los diferentes tipos de cópulas, como las Arquimedianas, elípticas y empíricas, con sus características y posibles aplicaciones. Entender que las cópulas tienen una amplia gama de aplicaciones en diversos campos como, climatología, ingeniería, ciencias sociales y especialmente las finanzas.

Para efectos de la practicidad, se considera una situación enfocada en el ámbito financiero utilizando el software R, donde se emplean las cópulas para modelar la dependencia entre diferentes activos financieros. Para ello, emplearemos un código en R [6], que trabaja con índices bursátiles del mercado mundial, para estimar y analizar la estructura de dependencia entre los rendimientos de los activos, lo que resulta importante para la simulación y análisis de portafolios y la evaluación de riesgos en el mercado financiero.

2. MARCO TEÓRICO MATEMÁTICO

En esta sección se establece la definición de cópula, sus propiedades y se define el teorema de Sklar, basados en [2][3].

Definición 1: Una cópula bivariante es una función de distribución bivariante que está definida sobre el cuadrado $[0,1][0,1]$ con distribuciones marginales uniformes $U(0,1)$.

Propiedad 1: Una cópula bivariante cumple con las siguientes propiedades:

- $C : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$

Existencia de relación funcional C, con dominio cuadrado unitario, y codominio intervalo cerrado $[0,1]$.

Condiciones de frontera

- $C(u_1,1) = u_1$; $C(1,u_2) = u_2$, es decir, si uno de sus argumentos vale uno, la función se comporta como una identidad.
- $C(u_1,0) = C(0,u_2) = 0$, es decir, si cualquiera de los dos argumentos vale cero, la función cópula vale cero. Es decir que cuando una de las variables aleatorias es mínima (igual a 0), la cópula devuelve 0.

Propiedad 2-creciente

- Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en $[0,1]$ con $u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2$, se tiene que:

$$C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(v_1, u_2) - C(u_1, u_2)$$

  Esta propiedad nos dice cómo se comportan las funciones cópula dentro de su dominio.

La definición sobre cópula y sus propiedades se pueden generalizar para n-dimensiones.

Definición 2: Una cópula n-dimensional $C : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$, es una función de distribución multivariante con distribuciones marginales uniformes. La cópula, formalmente se define como:

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)) = F(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Propiedades 2: Una cópula n-dimensional satisface las siguientes propiedades

- Como la función de distribución acumulativa es siempre creciente, $C(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ cada componente u_k también incrementa.
- El componente marginal u_i se obtiene estableciendo $u_j = 1$ para todo $j \neq i$ y debe distribuirse uniformemente. Es decir, $c(1, 1, \ldots, u_i, \ldots, 1) = u_i$
- Para $a_i \leq b_i$, la probabilidad $P(U_1 \in [a_1, b_1], \ldots, U_n \in [a_n, b_n])$, debe ser mayor que cero, lo que conduce a la llamada "*rectangle inequality*".

A continuación, se estudia el principal teorema, quizás el más importante, acerca del estudio de las cópulas. Este teorema es usado en todas las aplicaciones de cópulas.

Teorema 1: Teorema de Sklar

Sea H una función de distribución n-dimensional con marginales $F_i, \ldots, F_n$. Entonces existe una n-cópula C tal que, para todo x en $\mathbb{R}^n$,

$$H(x_1, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n))$$

Si $F_1, \ldots, F_n$ son todas continuas, entonces C es una cópula única. Además, C está determinado unicamente en $RanF_1 \times \ldots \times RanF_n$.

Por otro lado, si C es una n-cópula y $F_1, \ldots, F_n$ son funciones de distribución, entonces, la función H definida anteriormente es una función de distribución n-dimensional con marginales $F_1, \ldots, F_n$.

A continuación, se ilustra una Cópula

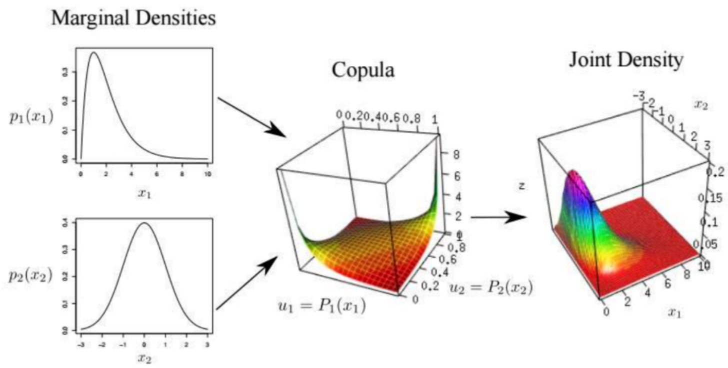


Figura 1: Cópula - Distribución conjunta

Fuente. Hernández Lobato, J., Lloyd, J., & Hernández Lobato, D. (1 de Julio de 2013). Cornell University Library. Obtenido de http://arxiv.org/abs/1307.0373

Descripción. Las funciones de distribución marginales sufren una transformación uniforme en el intervalo $[0, 1]$ para la conformación de la cópula, luego se realiza una nueva transformación a los datos originales para formar la distribución multivariante.

2.1. TIPOS DE CÓPULAS

Familia de cópulas elípticas

- **Cópula Gaussiana**: También conocida como la cópula normal, es una de las cópulas más utilizadas en la modelización de dependencias. Está asociada con la distribución normal multivariada [3][4][8].
- **Cópula de t-student**: Es una cópula que se basa en la distribución t de Student. Es útil para modelar dependencias que presentan colas pesadas [3].
- **Cópula Arquimediana**: Son un conjunto de cópulas que se caracterizan por su estructura funcional. Algunos ejemplos son la cópula de Clayton, Gumbel y Frank [3][5].

2.2. APLICACIÓN DE LAS CÓPULAS

Las cópulas matemáticas tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas áreas, incluyendo finanzas, riesgo, estadística, meteorología, biología, ingeniería, y más. Algunas de las aplicaciones más comunes dentro del ámbito financiero son:

- **Modelado de Dependencia**: las cópulas permiten modelar la dependencia entre variables aleatorias de manera más flexible que los métodos tradicionales como la correlación lineal. Esto es útil en finanzas para modelar la dependencia entre diferentes activos financieros o en hidrología para modelar la dependencia entre diferentes eventos climáticos [11] [8].
- **Valoración de Riesgos**: en el ámbito de la gestión de riesgos, las cópulas se utilizan para evaluar y cuantificar el riesgo asociado con diferentes eventos. Por ejemplo,

en seguros se pueden utilizar para modelar la dependencia entre diferentes tipos de reclamaciones [7].

- **Diversificación de Carteras**: en el campo de las finanzas, las cópulas pueden ayudar a los inversores a construir carteras más diversificadas al tener en cuenta la dependencia no lineal entre diferentes activos financieros [8].
- **Simulación de Montecarlo**: las cópulas son utilizadas en simulaciones de Montecarlo para generar muestras de variables aleatorias con una estructura de dependencia específica. Esto es útil en la evaluación de productos financieros complejos o en la valoración de opciones [12].
- **Modelado de Pérdidas Conjuntas**: en el contexto de la gestión de riesgos, las cópulas son útiles para modelar pérdidas conjuntas, es decir, el riesgo de experimentar pérdidas significativas en múltiples variables simultáneamente [9].

De lo anterior, se puede apreciar que las cópulas son herramientas útiles en el modelado financiero y de riesgos, ya que permiten modelar la estructura de dependencia entre variables aleatorias, incluidos los residuos de modelos de series temporales como GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) [16].

Por otro lado, cuando se trabaja con cópulas en el contexto de modelos financieros, se puede modelar la dependencia entre los residuos de diferentes activos o instrumentos financieros. Esto es importante porque muchos modelos financieros asumen independencia o una estructura de dependencia simple que puede no capturar adecuadamente la realidad de los mercados financieros, donde la dependencia puede ser no lineal o asimétrica [12][14].

Al modelar la dependencia con cópulas, es posible controlar directamente la estructura de dependencia entre los residuos, lo que puede mejorar la precisión de los pronósticos y la gestión de riesgos. Las cópulas también ofrecen flexibilidad para modelar diferentes formas de dependencia, como la cola pesada o la asimetría, lo que puede ser crucial en el análisis de eventos extremos y en la gestión de riesgos de cola [14].

En resumen, las cópulas permiten modelar la dependencia entre los residuos de los modelos de series temporales, lo que puede mejorar la precisión de los pronósticos y la gestión de riesgos en el ámbito financiero.

3. MARCO TEÓRICO FINANCIERO

En esta sección se va a definir algunos conceptos particulares del ámbito financiero, que serán útiles para la aplicación de las cópulas en un modelo de análisis de portafolios.

Portafolio: En el mercado, un portafolio o cartera de inversión es un conjunto de diferentes instrumentos financieros que se cotizan en el mercado y están disponibles para que las empresas o personas inviertan [13]. **Índice bursátil**: son índices que reflejan la evolución en el tiempo de los precios de los títulos cotizados en un mercado. Algunos índices son [17]:

- **S&P 500 (Estados Unidos)**: Apple Inc. (AAPL), Microsoft Corporation (MSFT), Amazon.com Inc. (AMZN), Facebook Inc. (FB).
- **Dow Jones Industrial Average (Estados Unidos)**: The Boeing Company (BA), Johnson & Johnson (JNJ), Microsoft Corporation (MSFT), Goldman Sachs Group Inc. (GS), Coca-Cola Company (KO).

- **DAX (Alemania)**: Siemens AG (SIE), SAP SE (SAP), Bayer AG (BAYN), Allianz SE (ALV), Adidas, Puma.
- **CAC 40 (Francia)**: LÓréal SA (OR).
- **COLCAP**: Ecopetrol S.A. (EC), Bancolombia S.A. (CIB), Grupo Aval Acciones y Valores S.A. (AVAL), Grupo SURA (GTV), Cementos Argos S.A. (CEMARGOS), Grupo Nutresa S.A. (NUTRESA), Grupo Argos S.A. (GRUPOARGOS), Cemex Latam Holdings S.A. (CLH), Grupo de Inversiones Suramericana S.A. (GRUPOSURA).

Valor en riesgo (VaR): Es una medida utilizada para evaluar el riesgo de una posición o cartera de activos financieros específica. La idea del VaR puede expresarse tanto en términos de rentabilidades como en términos de Pérdidas y Ganancias; además, depende de si se aplica la posición de compra o venta en un activo financiero [10] [15].

4. APLICACIÓN EN R

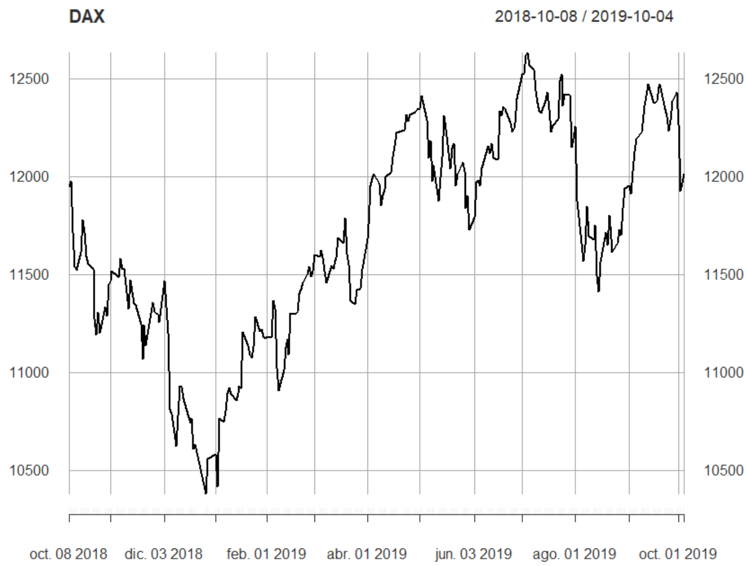
En esta sección, se trabaja en base al código proporcionado en [6], de tal manera que se utilice las cópulas como una herramienta para estudio de riesgo de un portafolio, utilizando los índices bursátiles de 10 regiones líderes en el mercado.

Índice bursátil	**País**	**Nombre en el código**
FCHI	Francia	CAC40
GDAXI	Alemania	DAX
SSMI	Suiza	SWISS
DJI	Estados Unidos	DOW
IBEX	España	IBEX
NDX	Estados Unidos	NASDAQ
STI	Singapur	SINGAPUR
N225	Japón	NIKKEI
AEX	Países Bajos	HOLANDA
HSI	Hong Kong	HONG

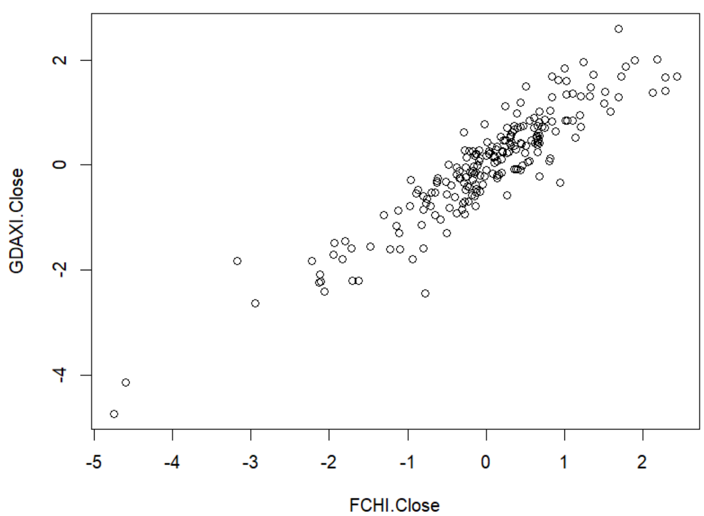
A continuación, se muestra un resumen de la estructura del código en R elaborado para la formulación del portafolio y su posterior análisis.

1. *Carga de Paquetes y bibliotecas*: se instalan y carga una serie de paquetes necesarios para el análisis financiero y la modelación de series temporales.
2. *Obtención de datos de índices bursátiles*: seguidos se descargan los precios de cierre de varios índices bursátiles.

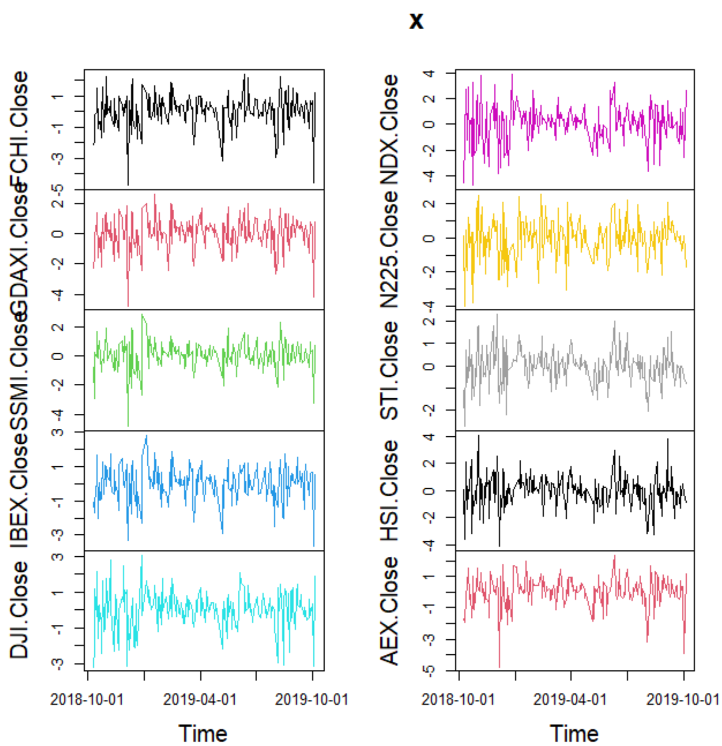
   En la siguiente imagen, muestra una serie de tiempo acerca del comportamiento del valor de cierre diario, durante un año, con respecto al índice bursátil DAX.



En la siguiente imagen, muestra la relación sobre el comportamiento de los índices bursátiles DAX y el FCHI.



3. *Preparación de datos*: Los precios de cierre descargados se transforman en retorno porcentuales y se organizan en un solo conjunto de datos.



4. *Modelación DCC Garch*: Los puntos se ajustan al modelo de DCC GARCH a los datos de los retornos de los índices bursátiles para modelar la volatilidad y la correlación entre ellos.

   Es este caso, El modelo DCC-GARCH ajustado, tiene la siguiente forma general:

   $$R_t = \mu_t + \epsilon_t$$

   donde:

   - R_t es el vector de rendimientos de los diferentes índices bursátiles.
   - μ_t es el vector de las medidas condicionales.
   - ϵ_t es el vector de errores estándar condicionales siguiendo una distribución t multivariada con matriz de varianza-covarianza condicional por el modelo DDC-GARCH.

   Los resultados del modelo en el software R, arroja lo siguiente:

```
*---------------------------------*
*        DCC GARCH Fit            *
*---------------------------------*

Distribution       :  mvt
Model              :  DCC(1,1)
No. Parameters     :  88
[VAR GARCH DCC UncQ] : [0+40+3+45]
No. Series         :  10
No. Obs.           :  211
Log-Likelihood     :  -1862.757
Av.Log-Likelihood  :  -8.83
```

Teniendo en cuenta lo anterior, se hacen las siguientes interpretaciones

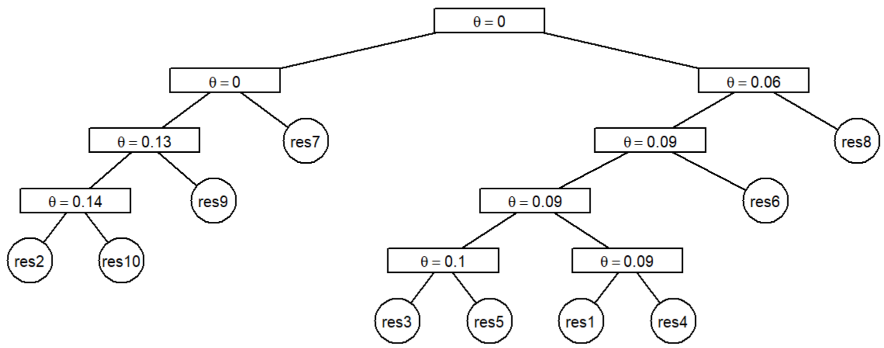
Distribution (Distribución): se indica que se ha utilizado una distribución multivariante t de Student (mvt) para modelar los residuos del proceso.

El resultado del modelo DCC GARCH Fit proporciona información sobre el ajuste del modelo DCC GARCH a los 10 índices bursátiles especificados (CAC40, DAX, SWISS, IBEX, DOW, NASDAQ, NIKKEI, SINGAPUR, HONG, HOLANDA). Esto significa que se utilizaron 211 registros o instantes en el tiempo de los datos de los 10 índices bursátiles (CAC40, DAX, SWISS, IBEX, DOW, NASDAQ, NIKKEI, SINGAPUR, HONG, HOLANDA).

No. Series (Número de Series): Indica que se están modelando 10 series temporales de los índices bursátiles mencionados.

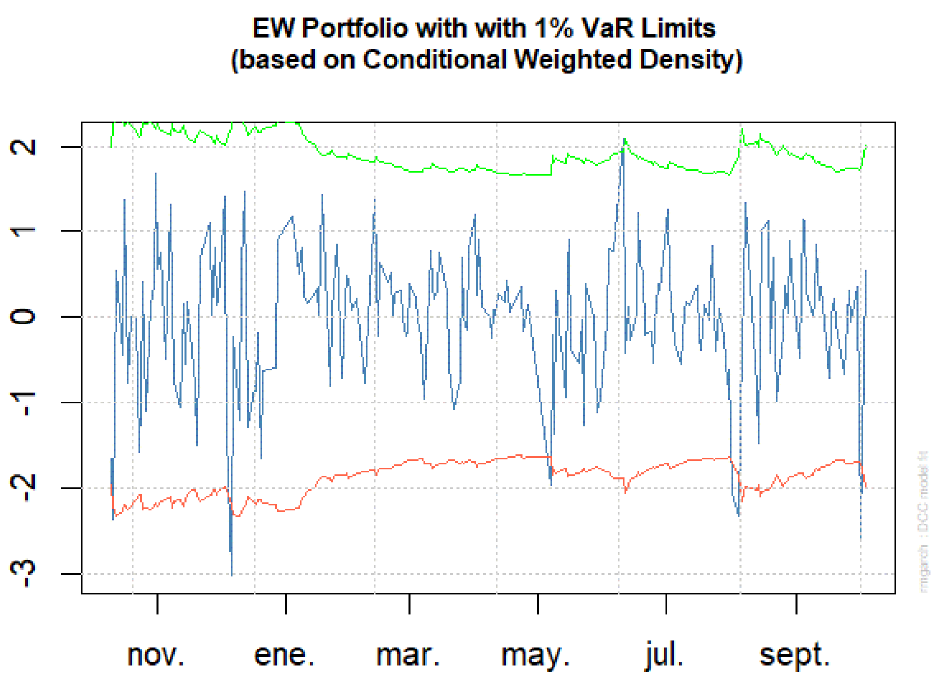
No. Obs. (Número de Observaciones): En resumen, el modelo DCC GARCH se ajustó utilizando datos de cómo cambiaron los precios de las acciones en estos 10 mercados en 211 momentos diferentes a lo largo de un período de tiempo.

5. *Estimación de cópulas*: se estima una cúpula que Arquimediana de forma jerárquica utilizando los residuos del modelo de DCC GARCH. Esto se hace para modelar las dependencias entre los residuos de los diferentes Índices bursátiles.



6. *Simulación de la cópula y los residuos*: se simulan nuevas muestras de la cópula estimada y se generan nuevos residuos utilizando estos valores simulados.

7. *Simulación de retornos*: se utilizan los residuos simulados junto con las previsiones de la volatilidad del modelo DCC GARCH para simular nuevos retornos.



8. *Construcción de portafolio*: Se construye una cartera de versión óptima utilizando los retornos simulados.

```
Title:
 CVAR Tangency Portfolio
 Estimator:      covEstimator
 Solver:         solveRglpk.CVAR
 Optimize:       minRisk
 Constraints:    minW maxW

Portfolio Weights:
  CAC40     DAX   SWISS    IBEX     DOW   NASDAQ
 0.0679  0.1742  0.2205  0.2500 -0.1322  0.1378
 NIKKEI SINGAPUR    HONG  HOLANDA
 0.1818  0.0226 -0.1046  0.1819

Covariance Risk Budgets:
  CAC40     DAX   SWISS    IBEX     DOW   NASDAQ
 0.0268  0.0240  0.1976  0.1819 -0.0309  0.1587
 NIKKEI SINGAPUR    HONG  HOLANDA
 0.3018  0.0031  0.0326  0.1044

Target Returns and Risks:
  mean    Cov   CVaR    VaR
0.0280 0.2758 0.4498 0.4034
```

Teniendo en cuenta el resumen de pasos anteriores, y los resultados que nos ofrece el código en R, se obtienen las siguientes conclusiones:

- Rendimiento objetivo (mean): Es del 2.8 %. Esto significa que, en promedio, se espera que el portafolio genere un rendimiento del 2.8 % durante el período de tiempo considerado.
- En este caso, el CVaR es del 44.98 %, lo que significa que, si ocurriera un evento extremo, se espera que la pérdida del portafolio esté al menos en el 44.98 % del valor del portafolio.
- En este caso, el VaR es del 40.34 %. Esto significa que con un cierto nivel de confianza del 95 %, se espera que la pérdida del portafolio no supere el 40.34 % durante el período de tiempo considerado.

Este enfoque se basa en la diversificación de la cartera, donde la inclusión de activos que no están altamente correlacionados entre sí puede reducir el riesgo total de la cartera y ayudar a mitigar las pérdidas potenciales en caso de movimientos adversos del mercado.

Por ejemplo, un inversor podría optar por incluir índices de acciones de Estados Unidos, Europa y Asia en su cartera, ya que estos mercados pueden responder de manera diferente a los eventos económicos y políticos globales.

5. Conclusiones

- **Flexibilidad en la Modelización de Dependencia**: Las cópulas matemáticas ofrecen una herramienta flexible para modelar la dependencia entre variables aleatorias en una amplia gama de campos, desde las finanzas hasta la meteorología y la ingeniería. Esto permite una mejor comprensión de las relaciones subyacentes entre diferentes fenómenos y la capacidad de prever y gestionar los riesgos asociados [18].

- **Mejora en la Gestión de Riesgos Financieros**: En el ámbito financiero, las cópulas desempeñan un papel crucial en la evaluación y gestión de riesgos, permitiendo a los inversores modelar la dependencia entre diferentes activos financieros y construir carteras más diversificadas. Esto proporciona una mejor protección contra movimientos adversos del mercado y ayuda a optimizar la gestión del riesgo de cartera [19].

- **Precisión en la Predicción y Gestión de Riesgos**: Al modelar la dependencia con cópulas, se puede mejorar la precisión de los pronósticos y la gestión de riesgos, especialmente en el análisis de eventos extremos y la gestión de riesgos de cola. Las cópulas ofrecen flexibilidad para capturar diferentes formas de dependencia, como colas pesadas o asimetrías, lo que mejora la capacidad de los modelos para reflejar con precisión la complejidad del mundo real [19].

- **Aplicabilidad Multidisciplinaria**: Las cópulas tienen aplicaciones no solo en el ámbito financiero, sino también en campos como la meteorología, la ingeniería, la biología y la medicina. Su versatilidad las convierte en una herramienta valiosa para analizar y modelar la dependencia en una amplia variedad de sistemas y fenómenos, lo que contribuye al avance en la comprensión y gestión de diversos aspectos de la realidad [20].

Referencias

[1] Okhrin, O., & Ristig, A. (2014). Hierarchical Archimedean copulae: the HAC package. Journal of Statistical Software, 58, 1-20.

[2] Schmidt, T. (2007). Coping with copulas. Copulas-From theory to application in finance, 3, 1-34.

[3] Fernández Gómez, L. D. (2021). Efecto de la dependencia entre retornos financieros en la optimización de portafolios de inversión: un abordaje mediante el uso de cópulas.

[4] Reyes, D. L. C. (2012, August). CÓPULAS: UN NUEVO ENFOQUE PARA LA MODELIZACIÓN EN GEOESTADÍSTICA. In Décimo Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística.

[5] Parra Patiño, L. F. (2009). Cópulas-una aplicación a la valoración de opciones.

[6] Rico, V. (2020). Carteras con copulas matemáticas. Recuperado de https://ricovictor.com/index.php/carteras-con-copulas-matematicas/

[7] González Acevedo, M. F., & Salcedo Redondo, G. A. (2016). Enfoque teórico y práctico de la teoría de cópulas en la medición del riesgo operacional de las entidades del sector financiero.

[8] Erdely, A. (2009). Cópulas y dependencia de variables aleatorias: Una introducción. Miscelánea Matemática, 48, 7-28.

[9] José, C. G., & NUÑEZ, M. J. Riesgo operativo: esquema de gestión y modelado del riesgo. Análisis Económico, (58).

[10] Lu, X. F., Lai, K. K., & Liang, L. (2014). Portfolio value-at-risk estimation in energy futures markets with time-varying copula-GARCH model. Annals of operations research, 219(1), 333-357.

[11] Escarela, G., & Hernández, A. (2009). Modelado de parejas aleatorias usando cópulas. Revista Colombiana de Estadística, 32(1), 33-58.

[12] Bolancé, C., Guillén, M., & Padilla, A. (2015). Estimación del riesgo mediante el ajuste de cópulas (No. 2015-01).

[13] Moreno Curiel, E. (2021). Definición de un portafolio de inversión de acuerdo con el perfil de riesgo de los clientes.

[14] Escarela, G., & Hernández, A. (2009). Modelado de parejas aleatorias usando cópulas. Revista Colombiana de Estadística, 32(1), 33-58.

[15] Novales, A. (2016). Valor en riesgo. Trabajo Investigativo). Universidad Complutense de Madrid, España.

[16] Mendoza Velázquez, A., & Galvanovskis, E. (2014). La cópula GED bivariada. Una aplicación en entornos de crisis. El trimestre económico, 81(323), 721-746.

[17] Pelayo, Á. P. F., & López, A. E. G. (2014). Importancia de los índices bursátiles en el mercado de Colombia. Innovando en la U, (6), 123-131.

[18] Ferrando, I., & Segura, C. (2020). Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. Avances de investigación en educación matemática, 17, 84-97.

[19] Velázquez, J. J. N., & Cuevas, T. N. P. VALORACIÓN DEL RIESGO MEDIANTE CÓPULAS, UTILIZANDO MIXTURAS NORMALES Y DE VALOR EXTREMO.

[20] Palacios, C. A. C., & Macías, G. R. P. (2020). Gestión de riesgo de crédito, para mejorar la calidad de la cartera de microcrédito, en la cooperativa comercio Ltda. Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional, 5(3), 225-254.

[21] Escobar Tibán, P. N. (2023). Incidencia de la meteorología en la calidad del aire antes, durante y después de la pandemia COVID-19 en Quito–Ecuador. UPEC.