Díaz y Rosero. 2025. Solución analítica de una integral definida con apoyo de GeoGebra. Revista Sigma, 21 (1). Páginas 1–11.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XXI № 1 (2025), páginas 1–11

Solución analítica de una integral definida con apoyo de GeoGebra

Sandra Milena Díaz Quiguantar [1]

Wilson Ricardo Rosero Patiño[2]

Abstract: As part of a calculus course, we tackled the solution of the definite integral $\int_{-2019\pi}^{2019\pi} \frac{1+\cos(x)}{2018^x+1} dx$. This article details the resolution process, integrating both analytical methods and technological tools.

This work highlights the importance of combining conventional mathematical techniques with computational tools to effectively address complex problems. Furthermore, it emphasizes the crucial role of Information and Communication Technologies (ICT) in mathematics education, offering students new approaches to visualizing, exploring, and understanding mathematical concepts.

Keywords. Integral calculus, even functions, integration methods, ICT, Dynamic Geometry Environment (DGE).

Resumen: En el marco de un curso de cálculo integral, se abordó la solución de la integral definida $\int_{-2019\pi}^{2019\pi} \frac{1+\cos(x)}{2018^x+1} dx$. En este artículo se detalla el proceso de resolución, integrando tanto métodos analíticos como herramientas tecnológicas.

Este trabajo subraya la importancia de combinar técnicas matemáticas convencionales con el uso de herramientas computacionales, para abordar problemas complejos de manera efectiva. Además, se pone en relieve el rol crucial de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas, proporcionando a los estudiantes nuevos enfoques para la visualización, exploración y comprensión de conceptos matemáticos.

Palabras Clave. Calculo integral, funciones pares, métodos de Integración, TIC, AGD.

[1]Licenciada en Matemáticas de la Universidad de Nariño, Docente del Colegio Bilingüe Lancaster Cali, email: diazzandra21@gmail.com

[2]Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño, Docente del Colegio San Antonio Maria Claret Cali, email: wrrpwrrpwrrp@gmail.com

1. Introducción

En los cursos de cálculo integral, los estudiantes se enfrentan a problemas que requieren una combinación de habilidades técnicas y una sólida comprensión conceptual. En este artículo, se examina un ejercicio matemático que representó un desafío tanto para nosotros como para nuestros compañeros en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Este ejercicio no solo pone a prueba los métodos convencionales de integración, sino que también exige un dominio de conceptos teóricos y fomenta la curiosidad y el pensamiento crítico en matemáticas.

Una herramienta fundamental en nuestro enfoque ha sido el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD), en particular, GeoGebra. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ofrecen a los estudiantes poderosas herramientas que potencian su aprendizaje al permitir una visualización clara y comprensible de los resultados de sus procesos[4]. Además, las TIC facilitan la exploración y experimentación autónoma, promoviendo la construcción activa del conocimiento y la estructuración de ideas[3]. El enfoque visual y dinámico de GeoGebra, en particular, ha demostrado ser una valiosa herramienta para enriquecer la comprensión y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Con este artículo, no solo buscamos resolver un ejercicio desafiante, sino también ofrecer a estudiantes y educadores una perspectiva enriquecedora sobre el uso de AGD. Creemos firmemente que la combinación de enfoques teóricos, herramientas tecnológicas, y pensamiento crítico matemático puede transformar la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral y de la matemática en general.

2. Explorando el ejercicio: análisis y estrategias

La integral que se presenta a continuación demanda la aplicación de una variedad de métodos de integración, cada uno de ellos seleccionado para abordar las particularidades del problema. A lo largo de esta sección, desglosaremos de manera detallada las estrategias empleadas, analizando no solo los pasos específicos de la resolución, sino también la lógica detrás de la elección de cada método.

$$\int_{-2019\pi}^{2019\pi} \frac{1+cos(x)}{2018^x+1}dx \tag{1}$$

Para simplificar la notación en el desarrollo de la integral, definimos las constantes de la siguiente manera:

$$a = 2018 \qquad \text{y} \qquad b = 2019$$

$$\int_{-2019\pi}^{2019\pi} \frac{1+cos(x)}{2018^x+1}dx = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1+cos(x)}{a^x+1}dx$$

La integral puede descomponerse en dos partes, las cuales resolveremos por separado:

$$\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1+\cos(x)}{a^x+1}dx = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1}{a^x+1}dx + \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{\cos(x)}{a^x+1}dx$$

Denotaremos estas integrales como:

$$I_1 = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1}{a^x+1}dx$$

$$I_2 = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{\cos(x)}{a^x+1}dx$$

2.1. Solución de la primera integral mediante el uso de métodos tradicionales

Primero se resuelve la integral I_1.

$$\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1}{a^x+1}dx$$

Se hace la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} u &= a^x+1 \\ u-1 &= a^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} du &= a^x \cdot ln|a|dx \\ du &= (u-1)\cdot ln|a|dx \\ \tfrac{du}{(u-1)\cdot ln|a|} &= dx \end{aligned}$$

De lo cual podemos trabajar con una integral equivalente [3].

$$\int \frac{1}{u(u-1)ln|a|}du = \frac{1}{ln|a|}\int \frac{1}{u(u-1)}du$$

Se aplica la descomposición de fracciones parciales como sumas de fracciones simples.

$$\frac{1}{ln|a|}\int \frac{1}{u(u-1)}du = \frac{1}{ln|a|}\int \left[\frac{A}{u} + \frac{B}{(u-1)}\right] du$$

[3] los límites de integración no cambian por comodidad de escritura y además cuando se resuelva la integral se vuelve a expresarla en términos de x por la sustitución $u = a^x+1$ y así podemos evaluar la función con los límites de integración iniciales.

Así, existen A y $B \in \mathbb{R}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u(u-1)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{(u-1)} \\
\frac{1}{u(u-1)} &= \frac{A(u-1)+B(u)}{u(u-1)} \\
\frac{1}{u(u-1)} &= \frac{Au-A+Bu}{u(u-1)} \\
\frac{1}{u(u-1)} &= \frac{u(A+B)-A}{u(u-1)}
\end{aligned}
$$

Al simplificar se tiene que:

$$1 = u(A+B) - A$$

Veamos que la parte de la izquierda de la igualdad es un polinomio de grado cero, mientras que el polinomio de la parte derecha es un polinomio de grado uno.

Al igualar los coeficientes se tiene que:

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{aligned} A+B&=0 \\ A&=-B \\ -1&=-B \\ 1&=B \end{aligned} & \qquad \text{Y} \qquad & \begin{aligned} -A&=1 \\ A&=-1 \end{aligned}
\end{array}
$$

Por tanto,

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{(u-1)}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{ln|a|}\int \frac{1}{u(u-1)}du &= \frac{1}{ln|a|}\int \left[\frac{-1}{u} + \frac{1}{(u-1)}\right] du \\
&= \frac{1}{ln|a|}\left[\int -\frac{1}{u}du + \int \frac{1}{(u-1)}du\right]
\end{aligned}
$$

Como las dos integrales son inmediatas, se resuelve:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{ln|a|}\int \frac{1}{u(u-1)}du &= \frac{1}{ln|a|}\left[\int -\frac{1}{u}du + \int \frac{1}{(u-1)}du\right] \\
&= \frac{1}{ln|a|}(-ln|u| + ln|u-1|) + c \\
&= -\frac{ln|u|}{ln|a|} + \frac{ln|u-1|}{ln|a|} + c
\end{aligned}
$$

Como $u = a^x + 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1}{a^x+1}dx &= -\frac{ln|a^x+1|}{ln|a|} + \frac{ln|a^x+1-1|}{ln|a|}\Bigg|_{-b\pi}^{b\pi} \\
&= -\frac{ln|a^x+1|}{ln|a|} + \frac{ln|a^x|}{ln|a|}\Bigg|_{-b\pi}^{b\pi} \\
&= -\frac{ln|a^x+1|}{ln|a|} + \frac{xln|a|}{ln|a|}\Bigg|_{-b\pi}^{b\pi} \\
&= -\frac{ln|a^x+1|}{ln|a|} + x\Bigg|_{-b\pi}^{b\pi}
\end{aligned}$$

Ahora se evalúa la integral.

$$\begin{aligned}
-\frac{ln|a^x+1|}{ln|a|} + x\Bigg|_{-b\pi}^{b\pi} &= \left[-\frac{ln|a^{b\pi}+1|}{ln|a|} + b\pi\right] - \left[-\frac{ln|a^{-b\pi}+1|}{ln|a|} + (-b\pi)\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-ln|\frac{1}{a^{b\pi}}+1| + (-b\pi)ln|a|}{ln|a|}\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-ln|\frac{1+a^{b\pi}}{a^{b\pi}}| - b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-(ln|1+a^{b\pi}| - ln|a^{b\pi}|) - b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-ln|1+a^{b\pi}| + ln|a^{b\pi}| - b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-ln|1+a^{b\pi}| + b\pi ln|a| - b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] \\
&= \left[\frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a|}{ln|a|}\right] - \left[\frac{-ln|1+a^{b\pi}|}{ln|a|}\right] \\
&= \frac{-ln|a^{b\pi}+1| + b\pi ln|a| + ln|a^{b\pi}+1|}{ln|a|} \\
&= \frac{b\pi ln|a|}{ln|a|} \\
&= b\pi \\
&= 2019\pi
\end{aligned}$$

2.2. Estudio detallado de la segunda integral con el apoyo de AGD y CAS.

Para abordar la resolución de I_2 , se exploraron diversos métodos de integración, centrándose particularmente en varias técnicas de integración por partes. Sin embargo, ante la dificultad de encontrar una solución directa utilizando estos enfoques, se optó por realizar un análisis más profundo de la integral implicada, utilizando tanto un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD)[4] como una Calculadora de Álgebra Simbólica (CAS)[5]. Inicialmente, se examinó la integral (1) para obtener un resultado preliminar, que se presenta en la figura 1 a continuación.

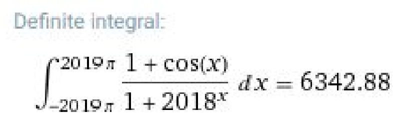

Figura 1: Resultado en Wolfram—Alpha de la integral I

Después se analizó la integral I_1 como se muestra en la figura 2.

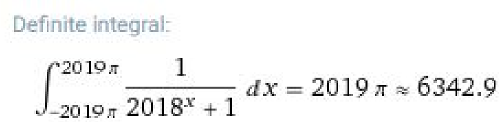

Figura 2: Resultado en Wolfram—Alpha de la integral I_1

Se notó que los resultados son bastante aproximados, esto llevo a suponer que la integral I_2 es 0, lo cual se corrobora en la figura 3.

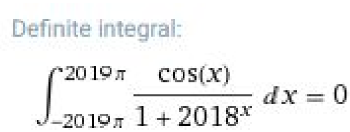

Figura 3: Resultado en Wolfram—Alpha de la integral I_2

Analizando lo anterior se conjeturó que la función integrando I_2 era par, lo que ingenuamente se intentó demostrar sin éxito, posteriormente se analizó la gráfica en GeoGebra y se supuso que la gráfica tiene un cierto periodo para $x < 0$ lo cual indujo a pensar que cada curva en el tercer cuadrante se anula con las curvas del segundo cuadrante como se muestra en la figura 4

[4]En este caso, se empleó GeoGebra
[5]Se utilizó Wolfram—Alpha para este propósito

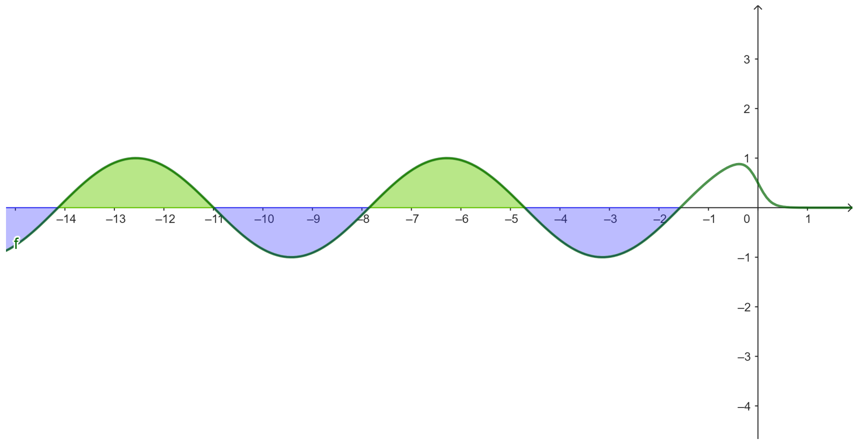

Figura 4: Gráfica en GeoGebra de $f(x) = \frac{cos(x)}{2018^x+1}$

Gracias a la idea de paridad de la función $f(x) = \frac{cos(x)}{2018^x+1}$ se decidió graficar $f(-x)$ que es la figura 5.

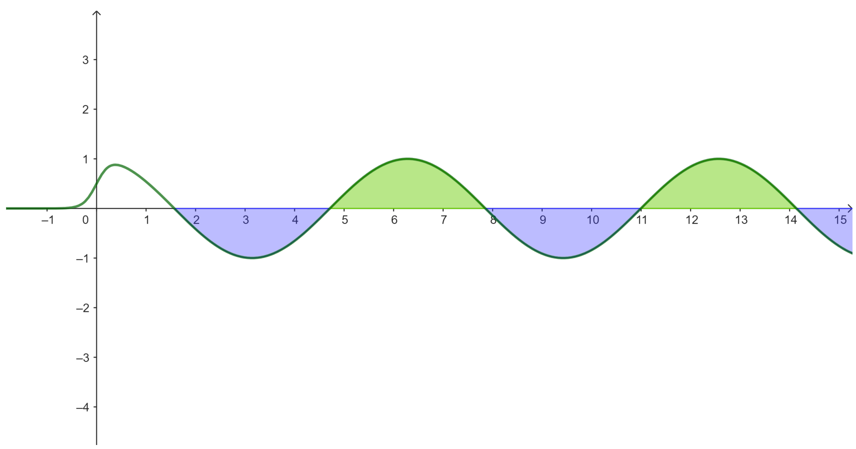

Figura 5: Gráfica en GeoGebra de $f(-x) = \frac{cos(-x)}{2018^{-x}+1}$

De las figuras 4 y 5 se observó que tienen similitud con la gráfica de $cos(x)$ como se presenta en la figura 6, por lo anterior se decidió hacer la suma $f(x) + f(-x)$ y el resultado fue $cos(x)$ como se muestra en la figura 7.

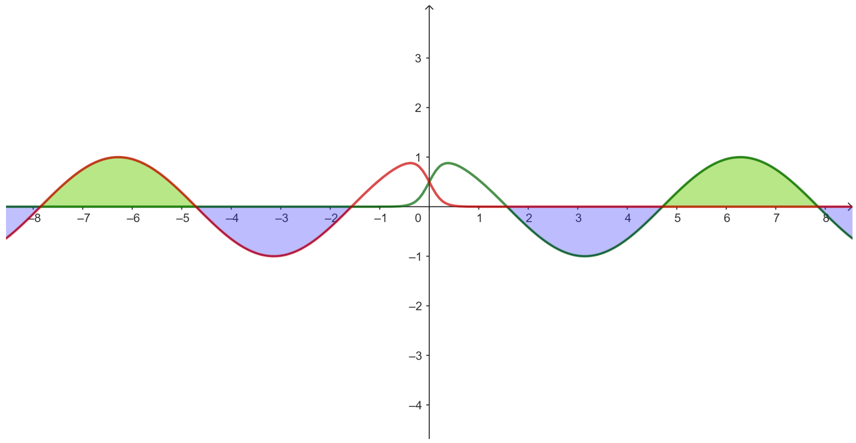

Figura 6: Gráfica en GeoGebra de $f(x)$ y $f(-x)$

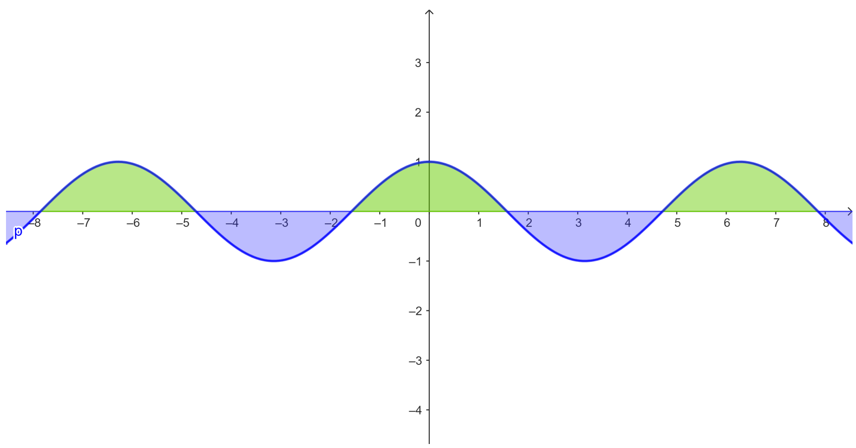

Figura 7: Gráfica en GeoGebra de $f(x) + f(-x) = cos(x)$

En síntesis podemos ver que $f(-x)$ es una reflexión de $f(x)$ respecto al eje y por ello se buscó un teorema que relacione el calculo integral con las transformaciones de funciones en particular la reflexión, lo cual se encontró en el libro de Apóstol [1] y lo señalamos como Teorema 2.1.

Teorema 2.1. *Propiedad reflexiva de las integrales [1]*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)dx$$

De este resultado podemos deducir que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f(-x)dx$$

Para facilitar los cálculos se toma I_2 de la siguiente manera:

$$I_2 = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{e^{cx} + 1} dx, \qquad donde \qquad c = ln|a| \qquad\qquad (*)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{e^{cx} + 1} dx &= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(-x)}{e^{-cx} + 1} dx \\
&= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{e^{-cx} + 1} dx, \qquad cos(x) \quad \text{es función par} \\
&= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{\frac{1}{e^{cx}} + 1} dx \\
&= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{\frac{1+e^{cx}}{e^{cx}}} dx \\
&= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{e^{cx} \cdot cos(x)}{1 + e^{cx}} dx \qquad\qquad (**)
\end{aligned}$$

De $(*)$ y $(**)$

$$\begin{aligned}
I_2 + I_2 &= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{e^{cx} + 1} dx + \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{e^{cx} \cdot cos(x)}{1 + e^{cx}} dx \\
2I_2 &= \int_{-b\pi}^{b\pi} \left[\frac{cos(x)}{e^{cx} + 1} + \frac{e^{cx} \cdot cos(x)}{1 + e^{cx}} \right] dx \\
2I_2 &= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x) + e^{cx} \cdot cos(x)}{e^{cx} + 1} dx \\
2I_2 &= \int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)(1 + e^{cx})}{e^{cx} + 1} dx \\
2I_2 &= \int_{-b\pi}^{b\pi} cos(x) dx \\
I_2 &= \frac{1}{2} \int_{-b\pi}^{b\pi} cos(x) dx
\end{aligned}$$

Como la integral es inmediata, se resuelve

$$\frac{1}{2} \int_{-b\pi}^{b\pi} cos(x) dx = \frac{1}{2} [-sen(x)] \Big|_{-b\pi}^{b\pi}$$

Ahora se evalúa la integral.

$$
\begin{aligned}
-sen(x)|_{-b\pi}^{b\pi} &= \frac{1}{2}[-sen(b\pi)] - [-sen(-b\pi)] \\
&= \frac{1}{2}[-sen(b\pi)] - [sen(b\pi)], \quad sen(x) \quad \text{es función impar} \\
&= \frac{2}{2}[-sen(b\pi)] \\
&= -sen(b\pi), \quad \text{como} \quad b = 2019 \\
&= -sen(2019\pi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En conclusión, sí $a = 2018$ y $b = 2019$, entonces:

$$
\begin{array}{ccccc}
I & = & I_1 & + & I_2 \\
\displaystyle\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1+cos(x)}{a^x+1}dx & = & \displaystyle\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{1}{a^x+1}dx & + & \displaystyle\int_{-b\pi}^{b\pi} \frac{cos(x)}{a^x+1}dx \\
 & = & b\pi & + & (-sen(b\pi)) \\
 & = & 2019\pi & - & (sen(2019\pi)) \\
 & = & 2019\pi & &
\end{array}
$$

3. Conclusiones y comentarios

1. Mediante el análisis de la integral (1) y el uso de herramientas como GeoGebra y Wolfram—Alpha, se pudo visualizar y comprender mejor el comportamiento de la función integrando. Esto permitió explorar posibles enfoques para resolver la integral y proporcionó perspectivas valiosas durante el proceso de solución.

2. Para la primera integral, se aplicaron los métodos de integración convencionales, como las fracciones propias y el cambio de variable. Estos métodos resultaron efectivos y se obtuvo una solución analítica precisa.

3. En el caso de la segunda integral, que involucraba una función exponencial, la aplicación de métodos tradicionales de integración no fue suficiente para encontrar una solución analítica. Sin embargo, el uso de herramientas computacionales como GeoGebra y Wolfram—Alpha permitió explorar el comportamiento de la integral y obtener una aproximación numérica precisa.

4. La combinación de métodos analíticos y herramientas computacionales resultó ser una estrategia efectiva para abordar problemas matemáticos. Esta combinación permitió obtener resultados precisos y enriqueció el proceso de resolución al brindar una comprensión más profunda del problema.

5. Además de la resolución de la integral, este trabajo resalta el papel de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El uso de herramientas como GeoGebra y Wolfram—Alpha proporciona a los estudiantes una experiencia interactiva y visual que favorece la comprensión y la construcción de conocimientos.

Referencias

[1] Apostol, T. M. (2007). Calculus, Volume I, One-variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra (Vol. 1). 8

[2] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.

[3] Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15, 225-253. 2

[4] Jiang, Z., White, A., & Rosenwasser, A. (2011). Randomized control trials on the dynamic geometry approach. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 2(2). 2