Libardo Jácome. 2025. Trisección de ángulos con regla y compás. Revista Sigma, 21 (1). Páginas 19–31.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XXI Nº 1 (2025), páginas 19–31

Trisección de ángulos con regla y compás

Libardo Manuel Jácome[1]

Abstract: It is one of the three classic problems of Greek mathematics. The problem statement is as follows. Given an angle, we want to find another that is one third of the given angle using a Euclidean ruler and compass in a finite number of steps. The simple form of the approach suggests that it can be solved easily; one cannot believe that its solution is impossible in any case.

This problem can be solved for some angles, but in general it is not possible since Wantzel's theorem has been known since 1837, which prevents it. Morley's theorem offers an opportunity to rediscover this famous problem, the statement is as follows: The three points of intersection of the adjacent trisectors of the angles of any triangle form an equilateral triangle. The theorem does not tell how to trisect the angles of the triangle. Knowing the impossibility of trisecting an angle in general, the equilateral triangle is called Morley's impossible triangle and the theorem is called Morley's miracle.

On this occasion, the aim is to solve the problem of trisection of an angle from another point of view, and in this way, Morley's impossible triangle is visualized since this triangle was what motivated the task of dividing the angles of a triangle into three. equal parts. The construction of the trisectors is carried out using the Euclidean ruler and compass, in a finite number of steps. The solution of the trisection of angles allows us to verify and visualize Morley's theorem. Morley's theorem is an incentive to embark on the adventure of trisecting angles.

Keywords. Trisection, constructible, ruler, compass.

Resumen: Es uno delos tres problemas clásicos de la matemática griega. El enunciado del problema es el siguiente. Dado un ángulo, se quiere encontrar otro que sea un tercio del ángulo dado utilizando regla y compás euclidianos en un número finito de pasos.

La forma tan simple del planteamiento da para pensar que se puede resolver fácilmente, no se puede creer que su solución en cualquier caso sea imposible. Este problema se puede resolver para algunos ángulos, pero en general no es posible ya que desde año 1837 se conoce el teorema de Wantzel que lo impide.

El teorema de Morley ofrece una oportunidad para reencontrarse con este famoso problema, el enunciado es el siguiente: Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero. El teorema no dice como trisectar los

[1]Docente, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: elo@udenar.edu.co

ángulos del triángulo. Sabiendo la imposibilidad de trisectar un ángulo en general, el triángulo equilátero es denominado el triángulo imposible de Morley y el teorema como el milagro de Morley.

En esta oportunidad, se pretende solucionar el problema de trisección de un ángulo desde otro punto de vista, y de esta manera, se visualiza el triángulo imposible de Morley ya que dicho triángulo fue que motivó la tarea de dividir los ángulos de un triángulo en tres partes iguales. La construcción de las trisectrices se lleva a cabo usando la regla y compás euclidianos, en un número finito de pasos. La solución de la trisección de ángulos permite comprobar, visualizar el teorema de Morley. El teorema de Morley es un aliciente para lanzarse a la aventura de trisectar ángulos.

Palabras Clave. Trisección, construible, regla, compás. .

1. Introducción

Las primeras figuras de las que partieron los griegos fueron la recta y la circunferencia, y por ello todas las proposiciones geométricas, fueran teoremas o construcciones, debían basarse en esas dos figuras y sus relaciones entre ellas. Los tres famosos problemas de la geometría griega se refieren a construcciones de entes abstractos, por lo tanto, lo que se buscaba era un algoritmo de construcción que permitiera solucionar el problema única y exclusivamente con una regla sin marcar, un compás y con un número finito de pasos.

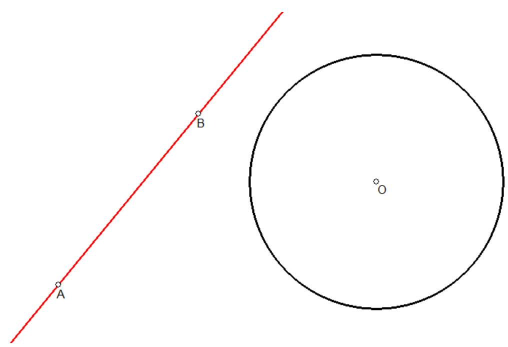

Figura 1

Los problemas consisten en la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo.

2. Los tres problemas Griegos

2.1. Duplicación del cubo

El problema de la duplicación del cubo consiste en determinar geométricamente el lado de un cubo de volumen doble del de un cubo de lado dado.

Una leyenda refiere que, consultando el oráculo de Delfos con el fin de aplacar una peste, habría aconsejado duplicar el ara de Apolo que era cúbica, de ahí el nombre de “problema de Delfos” con que a veces se le designa. Los intentos de resolver el problema con los medios ordinarios de la geometría resultaron vanos.

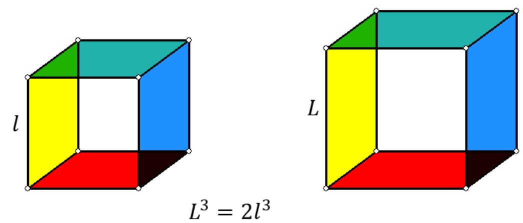

Figura 2

La figura 2 muestra lo que debería cumplirse si el problema tuviera solución.

2.2. La cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo fue un problema propuesto por Anaxágoras en el año 500 a.c. El problema de la cuadratura del círculo, surgió sin duda de la exigencia práctica de determinar el área conociendo su radio o su diámetro, y traduciéndose geométricamente en un problema de equivalencia: dado un segmento como radio de un círculo, determinar otro segmento como lado del cuadrado equivalente.

Los pitagóricos habían resuelto el problema de la cuadratura de los polígonos, pero al pasar de los polígonos al círculo, el proceso resultaba inaplicable y, al igual que en los otros dos problemas clásicos, los intentos de "cuadrar el círculo", sin acudir a recursos especiales, resultaron infructuosos.

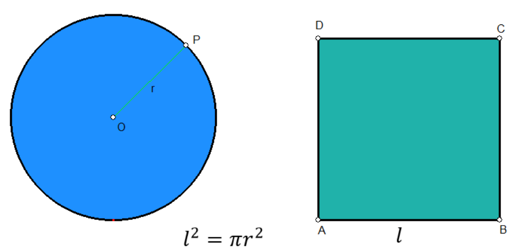

Figura 3

La figura 3 muestra un círculo de centro O y radio r y un cuadrado de lado l emulando una inalcanzable solución.

2.3. La trisección del ángulo

Consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales utilizando solamente regla y compás ya que eran las únicas herramientas utilizadas en esta época según las reglas de Euclides.

La idea es dado un ángulo $\angle ABC$ encontrar un punto P de manera que al trazar el rayo $\overrightarrow{BP}$ se obtenga $m\angle ABP = \frac{1}{3}m\angle ABC$.

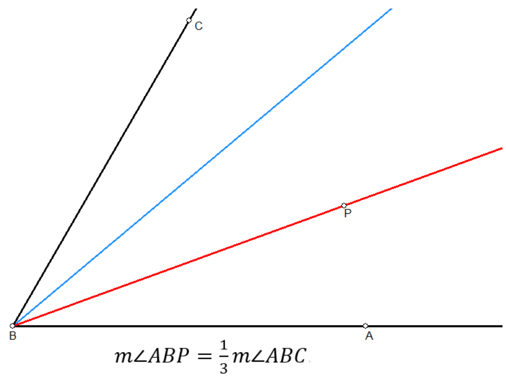

Figura 4

Es notable que algunos ángulos se puedan trisecar fácilmente como el de 180, 360 y 90 grados. En general cualquier ángulo no se puede trisecar.

Los griegos ante esta situación comenzaron a buscar otros procedimientos para intentar resolver los problemas. Soluciones planas cuando se usa la regla y el compás euclidianos. Soluciones sólidas cuando se empleaban secciones cónicas. Soluciones lineales cuando empleaban curvas más complicadas.

3. Los problemas son irresolubles

René Descartes resolvió algunos problemas de construcción, y observó que llevan a la solución de una determinada ecuación algebraica y que la solución de una ecuación algebraica puede realizarse con regla y compás si la ecuación es de primero o segundo grado. Si la ecuación era de tercero o cuarto grado se requería de la ayuda de las cónicas. Si la ecuación era de grado mayor a cuatro se necesitaban curvas más complicadas.

El área del círculo de centro O y radio r está dado por $A = \pi r^2$ y el área de cuadrado por $A = l^2$ como la áreas deben ser iguales se debe tener que $l^2 = \pi r^2$ de donde $l = r\sqrt{\pi}$.

Ahora r debe ser construible. Si l fuera construible $\sqrt{\pi} = \frac{l}{r}$ y $\sqrt{\pi}$ sería construible y por ende algebraico, En 1882, el matemático alemán Ferdinand Lindemann probo que es π un número trascendente. Por ello la cuadratura del círculo no se da.

El volumen del cubo dado es $v = l^3$ y se quiere construir otro de volumen el doble del anterior, es decir, $V = L^3 = 2l^3$ de donde resulta que el lado del nuevo cubo es $L = l\sqrt[3]{2}$. l debe ser construible, si L fuera construible $\sqrt[3]{2} = \frac{L}{l}$ también sería construible pero según la teoría de números construibles $\sqrt[3]{2}$ no lo es.

Para el caso de la trisección del ángulo se tiene por trigonometría, que $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Haciendo $\cos(3\alpha) = k$, $\cos\alpha = x$, se tiene $4x^3 - 3x - k = 0$ y dividiendo todos los términos por 4 se llega a $x^3 + \left(\frac{-3}{4}\right)x + \left(\frac{-k}{4}\right) = 0$ es decir a la forma $x^3 + px + q = 0$ que se resuelve mediante la fórmula de Cardano.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Las tres soluciones son:

$$x_1=u+v,\quad x_2=\left[-\frac{1}{2}(u+v)\right]+\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i,\quad x_3=\left[-\frac{1}{2}(u+v)\right]-\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i$$

Si se quiere trisecar el ángulo de medida 90°, se obtiene la ecuación $x^3-\frac{3}{4}x=0$, donde $p=-\frac{3}{4}$, $q=0$.

$$u=\sqrt[3]{-\frac{0}{2}+\sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{3}{4}}{3}\right)^3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{i},\qquad v=\sqrt[3]{-\frac{0}{2}-\sqrt{\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{3}{4}}{3}\right)^3}}=-\frac{1}{2}\sqrt[3]{i}$$

$$x_1=u+v=\frac{1}{2}\sqrt[3]{i}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{i}=0,\quad u-v=\frac{1}{2}\sqrt[3]{i}-\left[-\frac{1}{2}\sqrt[3]{i}\right]=\sqrt[3]{i},$$

$$x_2=\left[-\frac{1}{2}(u+v)\right]+\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i=\left[-\frac{1}{2}(0)\right]+\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{i})\right]i=-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{i^4})=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3=\left[-\frac{1}{2}(u+v)\right]-\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)\right]i=\left[-\frac{1}{2}(0)\right]-\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{i})\right]i=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{i^4})=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, se puede construir con regla y compás.

Si se quiere trisecar el ángulo de 60 grados se tiene la ecuación $4x^3-3x-\frac{1}{2}=0$ de donde $8x^3-6x-1=0$. Las posibles raíces racionales son $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$. Pero ninguna es raíz de la ecuación, lo que significa, según la teoría de números construibles, que $\cos(20°)$ no se puede construir.

El Teorema de Wantzel afirma que un número complejo es construible si y solamente si pertenece a una torre de extensiones cuadráticas, es decir, una sucesión finita de cuerpos, cada uno de los cuales es una extensión cuadrática del anterior.

Lo anterior lleva a la conclusión que la trisección de un ángulo se puede resolver en algunos casos y en otros no.

Pese a todo lo expuesto anteriormente se intentará trisecar un ángulo desde otro punto de vista totalmente diferente y es con la ayuda del teorema de Morley, el cual permite realizar la construcción con regla y compás euclidianos y en un número finito de pasos.

La idea para trisecar un ángulo se basa en la figura que resulta de la interpretación geométrica del Teorema de Morley y de la construcción de casos particulares para dicho teorema donde el desconocimiento de la posible o imposible trisección de un ángulo en particular lleva a un resultado sorprendente y es que para trisecar un ángulo, se deben triplicar otros tal como se hace cuando se triseca un segmento. Primero se triplica un segmento dado y luego se triseca el segmento de interés.

4. Trisección del ángulo desde otro punto de vista

Para ello se realizan unas construcciones previas para llegar a la trisección del ángulo.

4.1. Pasos para triplicar un ángulo dado

1. Sea el $\angle ABC$.
2. Por A se traza una recta m perpendicular al rayo $\overrightarrow{BC}$ que lo corta en D.
3. Con centro D y radio DA se traza una circunferencia c que corta a m en E.
4. Se traza el rayo $\overrightarrow{BE}$.
5. Por D se traza una recta n perpendicular al rayo $\overrightarrow{BE}$ que lo corta en F.
6. Con centro F y radio FD se traza una circunferencia d que corta a n en G.
7. Se traza el rayo $\overrightarrow{BG}$.
8. $m\angle ABG = 3\angle ABC$.

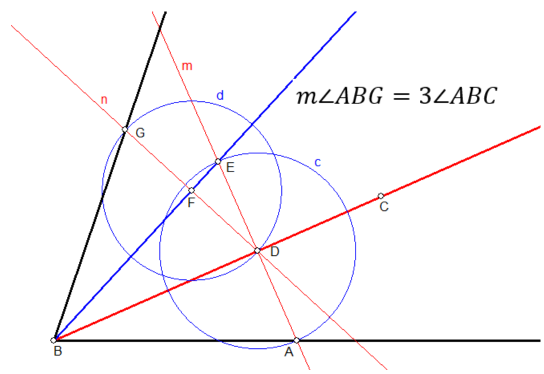

Figura 5

Demostración

$\overline{DA} \cong \overline{DE}$ Por ser radios de la misma circunferencia.

$\overline{BD} \cong \overline{BD}$ Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos.

$\angle BDA \cong \angle BDE$ Por ser rectos.

Por lo tanto, $\triangle BDA \cong \triangle BDE$ Por postulado LAL. y por ello $\angle ABD \cong \angle EBD$

Por otro lado,

$\overline{FD} \cong \overline{FG}$ Por ser radios de la misma circunferencia.

$\overline{BF} \cong \overline{BF}$ Propiedad reflexiva de la congruencia de segmentos.

$\angle BFD \cong \angle BFG$ Por ser rectos.

Por lo tanto, $\triangle BFD \cong \triangle BFG$ Por postulado LAL. y por ello $\angle FBD \cong \angle FBG$ o lo que es lo mismo $\angle EBD \cong \angle FBG$.

Así, se tiene $\angle ABD \cong \angle EBD \cong \angle FBG$.

En esta construcción se tienen dos verdades:

1. No se ha realizado la trisección del ángulo.
2. Los rayos $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE}$ son las trisectrices del ángulo $\angle ABG$.

4.2. Construcción de un ángulo congruente con otro

1. Sea el $\angle ABC$.
2. Se traza un rayo cualquiera $\overrightarrow{B'X}$.
3. Con centro B' y radio AB se traza una circunferencia c que corta a $\overrightarrow{B'X}$ en A'.
4. Se traza una circunferencia d con centro B' y radio BC.
5. Se traza una circunferencia e con centro A' y radio AC que corta a d en C'.
6. Se traza el rayo $\overrightarrow{B'C}$.
7. $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Ver figura 6.

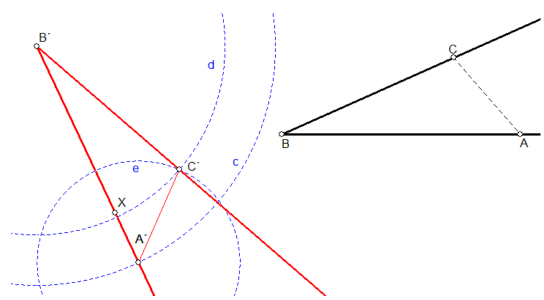

Figura 6

Según la construcción se tiene $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y aplicando el teorema LLL de Geometría Elemental, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

4.3. Trisección del ángulo recto

1. Sea el $\angle AOB$ recto.
2. Con centro O y radio OA se traza una circunferencia c.
3. Con centro A y radio AO se traza una circunferencia d que corta a d en C.

4. Se traza el rayo $\overrightarrow{OC}$.

5. Se traza la bisectriz de $\angle AOC$.

De esta manera el ángulo recto queda trisecado.

Ver figura 7.

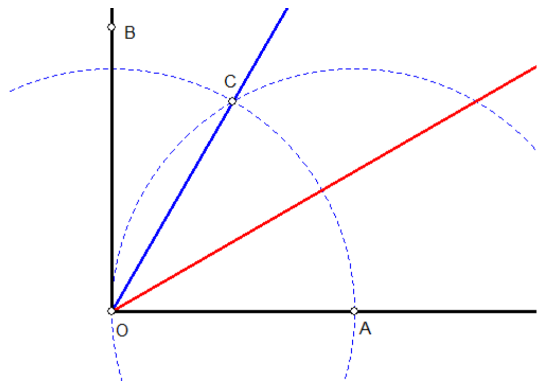

Figura 7

4.4. Trisección del ángulo doble

Si un ángulo $\angle AOB$ es trisecable entonces el ángulo de medida $2m\angle AOB$ es también trisecable.

1. Sea el $\angle AOB$ trisecado por el rayo $\overrightarrow{OC}$.

2. Con centro A y radio AO se traza una circunferencia c que corta a los rayos $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ en los puntos P, Q, D respectivamente.

3. Se trazan los rayos $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$.

Según la construcción se tiene:

$$m\angle DAP = 2m\angle AOB, \qquad m\angle DAQ = 2m\angle AOC, \qquad m\angle AOC = \frac{1}{3}m\angle AOB$$

$$\begin{aligned} m\angle DAQ = 2m\angle AOC = 2\left(\frac{1}{3}m\angle AOB\right) &= \frac{1}{3}(2m\angle AOB) \\ = 2\left(\frac{1}{3}m\angle AOB\right) &= 2m\angle AOC = m\angle DAQ. \end{aligned}$$

Ver figura 8.

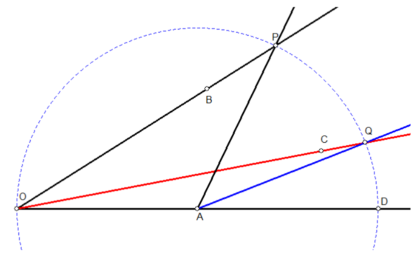

Figura 8

4.5. Trisección del ángulo mitad

Si el ángulo $\angle AOB$ trisecable entonces el ángulo de medida $\frac{1}{2}m\angle AOB$ es trisecable.

1. Sea el $\angle AOB$ trisecado por el rayo $\overrightarrow{OC}$.
2. Se traza la recta $\overleftrightarrow{OA}$
3. Con centro O y radio OA se traza una circunferencia c que corta a los rayos $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y a la recta $\overleftrightarrow{OA}$ en los puntos P, Q, D respectivamente.
4. Se trazan los rayos $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{DQ}$.
5. Según la construcción se tiene: $m\angle AOC = \frac{1}{3}m\angle AOB$, $\;m\angle ADP = \frac{1}{2}m\angle AOB$.
6. $m\angle ADQ = \frac{1}{2}m\angle AOC = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\angle AOB\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}m\angle AOB\right) = \frac{1}{3}(m\angle ADP)$.

Ver figura 9.

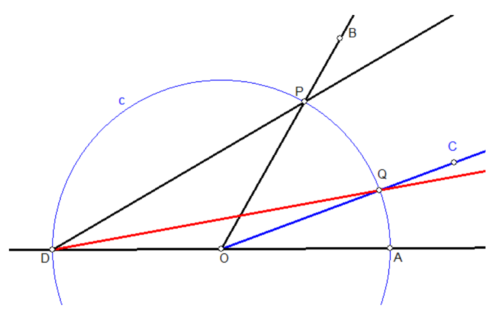

Figura 9

5. El Teorema de Morley

Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero.

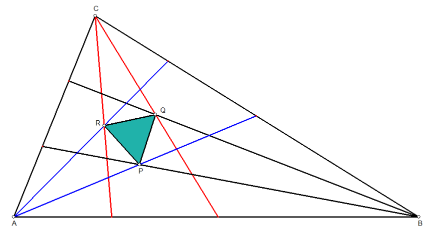

Figura 10

En el presente documento no se presentará la demostración ya que no es el objetivo del mismo.

6. Biografía de Frank Morley

Morley nació en Woodbridge. Despues de sus estudios secundarios en su localidad natal, se matriculó en el King's College (Cambridge), donde se graduó en 1884. Fue profesor del Bath College, en Somerset. En 1887 se fue a Pensilvania, para ocupar un cargo docente en Haverford College.

En 1900 pasó a dirigir el departamento de Matemáticas de la Universidad Johns Hopkins, en la que permaneció hasta que se jubiló en 1928. En esta universidad, dirigió más de cincuenta tesis doctorales. Entre sus publicaciones se pueden mencionar Elementary Treatise on the Theory of Functions (1893), con James Harkness, e Introduction to the Theory of Analytic Functions (1898). Fue presidente de la American Mathematical Society de 1919 a 1920 y editor del American Journal of Mathematics de 1900 a 1921.

En 1933 publicó junto con su hijo Frank Vigor la obra Inversive Geometry, que desarrolla el uso de los números complejos como herramientas para la geometría y la teoría de funciones.

Fue un buen jugador de ajedrez y ganó en una ocasión al campeón del mundo Emanuel Lasker.

Morley es recordado por lo que muchos matemáticos llamaron en su tiempo el Milagro de Morley: una propiedad muy escondida de las trisectrices de los ángulos de un triángulo y que hoy conocemos como el teorema de las trisectrices de Morley.

7. Construcción de un triángulo de dos ángulos trisecables

1. Se traza el segmento $\overline{AB}$.
2. Sea $\angle ABM, \ \ \angle ABN$ tal que $m\angle ABM + m\angle BAN < 60°$.
3. Se trazan los rayos $\overrightarrow{AT}, \ \overrightarrow{BS}$ tal que $m\angle BAT = 3m\angle BAN, \ \ m\angle ABS = 3m\angle ABM$.
4. Los rayos $\overrightarrow{AT}, \ \overrightarrow{BS}$ se cortan en C.

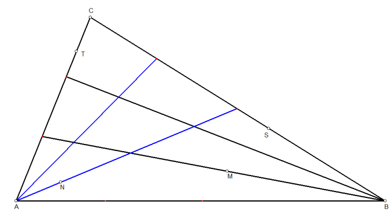

Figura 11

El triángulo $\triangle ABC$ es el triángulo con ángulos trisecables $\angle ABC,\ \angle BAC$.

Los rayos $\overrightarrow{AT},\ \overrightarrow{BS}$ se obtienen usando la construcción de triplicar un ángulo.

A este triángulo se lo puede denominar triángulo resolvente.

8. Teorema 1

Si en un triángulo dos de sus ángulos son trisecables entonces el tercer ángulo es trisecable.

Hipótesis. Sea el $\triangle ABC$ donde $\angle ABC,\ \angle BAC$ son trisecables. Tesis. $\angle ACB$ es trisecable.

Demostración.

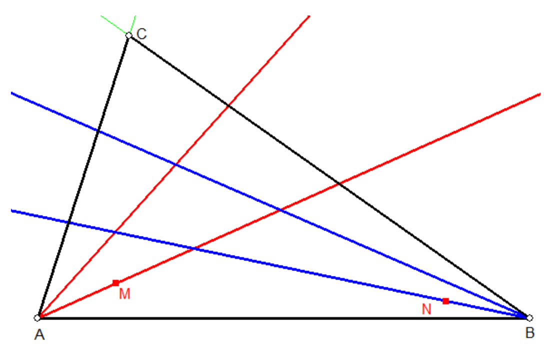

Figura 12

Por hipótesis $\angle ABC, \angle BAC$ son trisecables y por tanto, existen los rayos $\overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{BM}$ tal que $m\angle ABM = \dfrac{1}{3}m\angle ABC,\ \ m\angle BAN = \dfrac{1}{3}m\angle BAC$.

Ahora $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = 180°$ por teorema de Geometría Elemental de donde $m\angle ACB = 180° - m\angle ABC - m\angle BAC = 180° - 3m\angle ABM - 3m\angle BAN$ Multiplicando todos los términos por $\frac{1}{3}$ se tiene:

$$\frac{1}{3}m\angle ACB = 60° - m\angle ABM - m\angle BAN.$$

Es decir, la trisección de un ángulo se transforma en resta de ángulos que se logra construyendo en el interior del $\angle ACB$ sucesivamente ángulos de medidas $m\angle ABM, m\angle BAN$ y el ángulo que sobra es el ángulo que triseca al ángulo $\angle ACB$ ■.

Es necesario notar que él $\angle ACB$ se ha trisecado, no se ha triplicado. Si en la desigualdad $m\angle ABM + m\angle BAN < 60°$ se multiplican todos los términos por 3 se tiene $3m\angle ABM + 3m\angle BAN < 180°$ es decir, $m\angle ABC + m\angle BAC < 180°$ lo cual se puede interpretar como condición para que el triángulo exista.

Ahora teniendo en cuenta el triángulo resolvente y el teorema 1, el triángulo de Morley se lo puede construir fácilmente, ya de manera elemental con regla y compás se han trazado las tricectrices del ángulo $\angle C$.

Ahora el triángulo $\triangle ABC$ se lo puede modificar haciendo variar los ángulos resolventes y el lado $\overline{AB}$ de manera que el ángulo $\angle C$ siempre va a ser trisecable y permite que la construcción del triángulo de Morley no sea tan abstracto.

El teorema de Morley se extiende más allá de las tricectrices interiores y se da el caso que se puede tomar trisectrices externas de dos ángulos e internas del tercer ángulo determinan un triángulo de Morley. De modo que el ángulo exterior de un triángulo se debe trisecar para obtener más triángulos de Morley.

9. Teorema 2

Si un ángulo es trisecable, entonces su suplemento también lo es.

Hipótesis. $\angle ABC$ un ángulo trisecable y $\angle PQR$ su suplemento.

Tesis. $\angle PQR$ es trisecable.

Demostración.

Por definición de ángulos suplementarios se tiene $m\angle ABC + m\angle PQR = 180°$ Como $\angle ABC$ es trisecable, en el interior del $\angle ABC$ existe un punto P tal que $m\angle ABP = \frac{1}{3}m\angle ABC$.

$m\angle PQR = 180° - m\angle ABC$ de donde $\frac{1}{3}m\angle PQR = 60° - \frac{1}{3}m\angle ABC$ y finalmente,

$$\frac{1}{3}m\angle PQR = 60° - m\angle ABP \quad \blacksquare$$

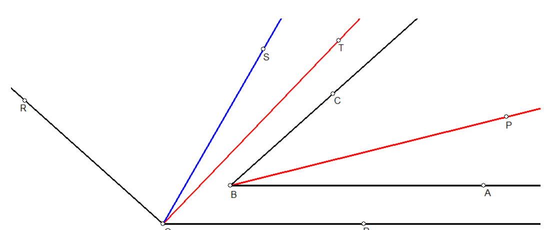

Figura 13

Es decir, para trisecar el $\angle PQR$ basta construir un ángulo $\angle PQS$ de medida 60° y proceder a construir en el interior de este ángulo otro $\angle SQT$ que sea congruente con $\angle ABP$ y el ángulo $\angle PQT$ es la tercera parte del $\angle PQR$.

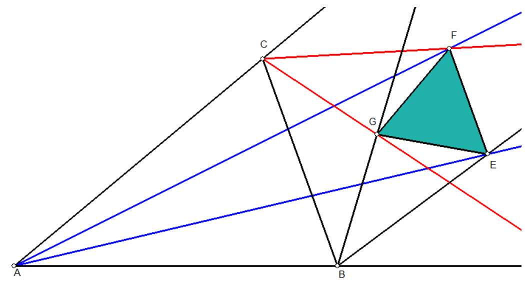

Figura 14

En la figura 14, la intersección de las trisectrices más cercanas a cada lado determinan el triángulo de Morley.

De manera similar se presenta la figura para otros dos triángulos de Morley con la demás trisectrices.

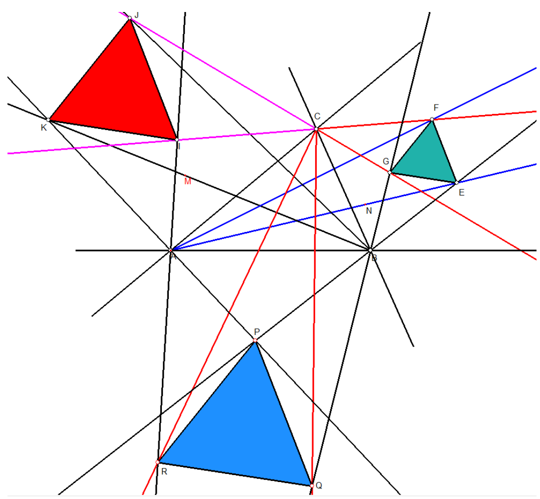

Figura 15

Finalmente el triángulo IGP en color amarillo también es otro triángulo en este caso posible de Morley.

10. Conclusiones

- El teorema de Morley motiva a trisectar ángulos de un triángulo que se lo construye para este fin.
- Esta trisección inesperada ayuda a visualizar y construir el triángulo imposible de Morley.
- La trisección del ángulo tiene un comportamiento logarítmico, es decir, para dividir hay que restar.

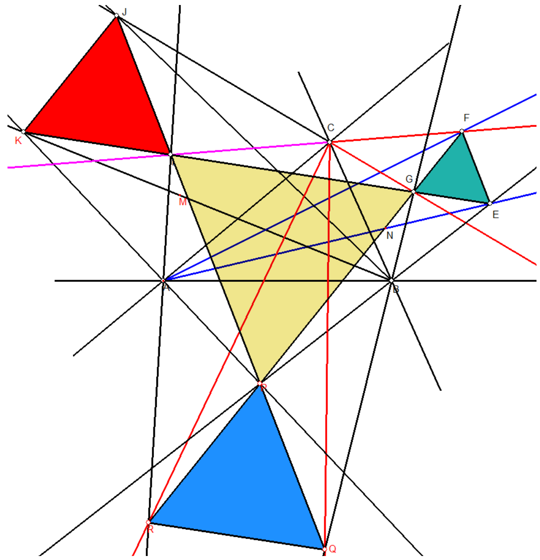

Figura 16

Referencias

[1] Coxeter H. *Fundamentos de geometría*. Limusa. (1971).

[2] Blog Revista digital de matemáticas Sacit Ámetan (s.f.). *El tríangulo de Morley: otra maravilla geométrica*. Consultado: noviembre 29 de 2022, en: http://revistasacitametam.blogspot.com/2013/02/el-triangulo-de-morley-otra-maravilla.html

[3] Labra A. Suazo A. *Elementos de la teoría de cuerpos*. https://repositorio.cmmedu.uchile.cl/Instructional%20design%20(of%20materiales%20or%20pedagogical%20models).pdf

[4] Sanchez C. *Los tres famosos teoremas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Universidad nacional de Colombia. Santafé de Bogotá. (1994).

[5] Frases sobre Imposibles.https://www.psicologia.com/frases/imposibles