Corredor y Córdoba. 2025. Cuadratura de la parábola por el Método Exhaustivo. Revista Sigma, 21 (1). Páginas 12–18.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XXI № 1 (2025), páginas 12–18

Cuadratura de la parábola por el Método Exhaustivo

Anyi Daniela Corredor[1]

Ricardo Córdoba Gómez[2]

Abstract: This paper will show some fundamental elements in the study of the problem of the quadrature of a parabolic segment by the Exhaustive Method developed by Archimedes, evidencing the impact of the work of the genius of Syracuse in the development of mathematics. In addition, some preliminary results that allow to establish such demonstration are indicated.

Keywords. Quadrature, Exhaustive Method, parabolic segment.

Resumen: En este trabajo se mostraran algunos elementos fundamentales en el estudio del problema de la cuadratura de un segmento parabólico por el Método Exhaustivo desarrollada por Arquímedes, evidenciando el impacto del trabajo del genio de Siracusa en el desarrollo de la matemática. Además, se indicarán algunos resultados preliminares que permiten establecer dicha demostración.

Palabras Clave. Cuadratura, Método Exhaustivo, segmento parabólico.

1. Introducción

"Quien comprenda a Arquímedes y a Apolonio admirará menos los logros de los hombres posteriores" G.W. Leibniz. Esta frase mencionada por unos de los matemáticos más destacados de la época, pone de manifiesto el inmenso valor matemático y científico que tiene el trabajo desarrollado por el genio de Siracusa. Así mismo, permite evidenciar el ingenio y el adelanto de Arquímedes con respecto a su época, de la misma manera que Isaac Newton quiso decir con la siguiente frase: "estar subido a hombros de gigantes", lo cual reafirma que los desarrollos alcanzados posteriormente en matemáticas están de una u otra manera

[1]Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán-Colombia. Correo: corredorim@unicauca.edu.co

[2]Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto-Colombia. Correo: rcordoba@udenar.edu.co

ligados a las aportaciones de estos grandes personajes, que siempre van a ocupar un espacio destacado en la historia de las matemáticas.

Una de las obras más importantes de Arquímedes es: "Sobre la cuadratura de la parábola" (ver [4]). En esta obra, Arquímedes desarrolla una potente teoría matemática para abordar un problema que no había sido estudiado, y tal como lo menciona el autor en el prefacio de este trabajo, muchos matemáticos habían intentado encontrar el área de un segmento de círculo o hipérbola[3], pero que ninguno intentó la cuadratura de un segmento de parábola. El genio de Siracusa obtuvo dicha cuadratura de dos formas: por medios mecánicos y por el Método Exhaustivo. En la primera, Arquímedes utiliza métodos mecánicos para demostrar resultados matemáticos, desligándose de esta manera del pensamiento platónico, el cual presume a la matemática como una ciencia pura e incorruptible por otras ciencias, por eso Arquímedes es considerado como el primer físico-matemático. En este artículo, se va a dirigir la atención hacia la cuadratura de la parábola por el Método Exhaustivo, aunque el objetivo no es presentar una recopilación técnica del estudio de este problema, sino, mostrar algunos de los elementos que intervienen en la construcción e igualmente presentar una versión moderna de la misma.

El problema de la cuadratura de figuras planas rectilíneas es estudiado y abordado en los Elementos de Euclides (ver por ejemplo [5]), usando entre otras herramientas, el método de regla y compás. El primer intento conocido para obtener un cuadrado de área igual a la de un círculo dado (lo que se conoce por cuadrar el círculo) aparece enunciado en el Papiro Rhind, un documento egipcio descubierto en 1855 que contiene una serie de problemas matemáticos planteados hace unos 4.000 años. Sin embargo, fueron los antiguos griegos, los que plantearon con precisión el problema en términos matemáticos, a saber: construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, utilizando sólo la regla y el compás. Desde una visión actual, el propósito de Euclides es establecer una teoría de la medida, para ello, en los dos primeros libros de los Elementos, aborda el problema de la medida de figuras planas rectilíneas.

Por lo tanto, surge el siguiente interrogante ¿Cómo cuadrar figuras planas no rectilíneas? Como parte de la respuesta a éste, se plantea el objetivo de este documento el cual fue mencionado anteriormente. Dentro del problema del cálculo de áreas de figuras, Arquímedes es uno de los que avanza en la solución del mismo, traspasando la barrera euclidiana de las figuras rectilíneas. Aunque sus trabajos están dedicados a cierto tipo de figuras particulares y no hay un tratamiento general del área, ni del trazado de tangentes, sus obras trascienden estos casos y se establecen como una propuesta metodológica general para el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco y tangentes. Entre los elementos teóricos usados por Arquímedes, se encuentra el conocido Método Exhaustivo.

2. Método Exhaustivo

El Método Exhaustivo aparece como un avance en la reflexión al problema de las paradojas surgidas en el tratamiento de los procesos infinitos. Euclides en las dos primeras proposiciones del libro XII de sus Elementos, presenta un primer acercamiento al Método Exhaustivo de Eudoxo, en el cual se pueden ver los primeros rasgos de la operación que hoy llamamos "del paso al límite". Aunque Arquímedes no fue el inventor de dicho método, visualizó en éste una poderosa herramienta teórica para establecer la cuadratura de varias figuras planas no rectilíneas. Con este fin desarrolló algunos métodos por medio de los cuales pudo obtener unos "límites" particulares, razón por la cual es considerado como uno de los forjadores

[3]Un segmento de una curva convexa es una regi´on acotada por una l´ınea recta y una porci´on de la curva.

del cálculo como disciplina matemática. En el libro XII, Euclides estudia el área del círculo y volúmenes de algunos sólidos, para ello se basa en procedimientos que se remontan a Eudoxo y utiliza el Método Exhaustivo, el cual se fundamenta en la proposición X.1 descrita a continuación:

"Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada."

Como se ha dicho anteriormente el Método Exhaustivo es la herramienta principal que utiliza Arquímedes, con el fin de establecer la cuadratura de un segmento parabólico. La esencia matemática de este método consiste en la sucesión de las siguientes operaciones, las cuales se matizan tomando como referencia la siguiente figura, suponiendo que se va a "cuadrar" la figura no rectilínea R.

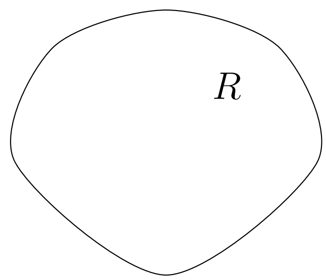

Figura 1: Figura rectilínea

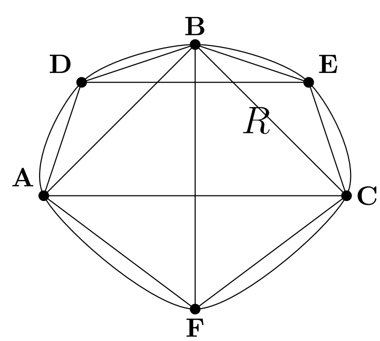

Figura 2: Método exhaustivo

1. Se inscribe (circunscribe) una sucesión de figuras rectilíneas $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ que crecen monótonamente. En este caso: $A_1 = ABC$, $A_2 = ABECF$, etc.
2. Las figuras se escogen de tal suerte que la sucesión $R - A_1, R - A_2, \ldots, R - A_n, \ldots$ cumpla con las hipótesis de la proposición X.1. de los *Elementos*.
3. Con ayuda de consideraciones teóricas, se presume el "límite" en la sucesión de las figuras inscritas, el cual se designa por A.

Finalmente se prueba que el "límite A", es igual al área buscada. Para ello Arquímedes recurre al método de reducción al absurdo, el cual era usual en la matemática griega. En la aplicación del método de reducción al absurdo el genio de Siracusa recurre a la llamada propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes, axioma que aparece en el libro *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura de la Parábola y en Espirales.* Aparentemente éste axioma fue formulado por Eudoxo. Entonces, para obtener el "límite" buscado se procede de la siguiente manera:

a. Se supone $R > A$, de lo cual $R - A > 0$ ($R - A > 0$ significa en este contexto que $R - A$ corresponde a una magnitud superficial), y por lo tanto, por el principio de Eudoxo, existe n tal que $R - A_n < R - A$; esto significa que $A_n > A$, lo cual es imposible.

b. Se supone $R < A$, de lo cual $A - R > 0$, y por lo tanto, dado que la sucesión $(A_n)_n$ tiene por límite A, se tiene que existe n tal que $A - A_n < A - R$ y de aquí se deduce que $A_n > R$, lo cual es imposible.

En consecuencia, la única posibilidad es que $R = A$, tal como se deseaba (para más detalles ver [3]).

La cuadratura de la parábola corresponde a la proposición 24 de la obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, por lo cual, es importante detallar algunas proposiciones previas, junto con ciertos detalles de su demostración.

Proposición 2.1. *Dada la parábola ABG y la recta DB paralela al diámetro, o el mismo diámetro, y la recta ADG paralela a la tangente en B, las rectas AD y DG serán iguales, y recíprocamente, si estas rectas son iguales, la AG será paralela a la tangente en B.*

Un elemento relevante en la proposición anterior es el uso de la equivalencia lógica, lo cual presenta una diferencia importante en la forma de redacción de las proposiciones por parte de Euclides en su libro *Elementos*, quien presentaría dos resultados por separado para consignar la proposición 2.1. Esta diferencia, de alguna manera evidencia parte del gran valor matemático de las obras de Arquímedes y su impacto en el desarrollo de la matemática contemporánea.

En la demostración de la proposición 24 (proposición 2.3), se destaca el número 4/3, en particular, en la siguiente proposición cuya demostración se omitirá, también hace uso de la anterior razón.

Proposición 2.2. *Si desde los puntos medios de la base de un segmento y de su mitad se trazan sendas paralelas al diámetro, la primera es cuádruple del tercio de la segunda.*

Se presentará la proposición 24, con el fin de detallar parte del trabajo matemático de Arquímedes frente al problema de la cuadratura de figuras planas no rectilíneas, en el caso particular de la parábola.

Proposición 2.3. *El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio de un triángulo de la misma base y de la misma altura que el segmento.*

La demostración de esta proposición aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus. El proceso seguido por el genio de Siracusa consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una manera ingeniosa.

La demostración de la proposición 24 se desarrolla en tres grandes pasos. En cada uno de ellos se describirán los elementos centrales de la prueba, puesto que se quiere estudiar las herramientas teóricas que se implementan y se consideran.

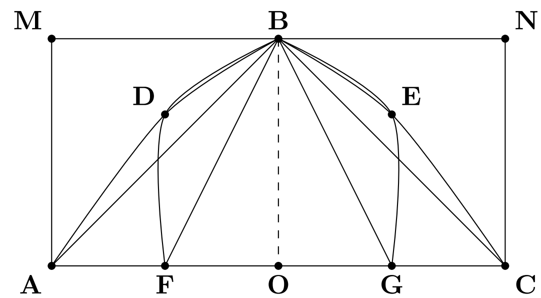

Figura 3: Inscripción de polígonos

3. Ideas fundamentales de la cuadratura de la parábola

Para establecer la cuadratura de la parábola Arquímedes implementa el siguiente proceso (ver por ejemplo [1]-[3]). Considerando la parábola ABC, en la cual B es el vértice de la parábola. En esta se inscriben los triángulos tal como se puede ver en la figura 3. A continuación se recurre a la siguiente sucesión de polígonos inscritos: $P_0 = \Delta ABC, P_1 = P_0 + \Delta ADB + \Delta BCE$, y de la misma forma se establece $P_2, \cdots, P_n, \cdots$

Dividiendo el segmento AC en cuatro partes iguales, trazando FD y GE paralelos a OB y utilizando las propiedades de la parábola se tiene que

$$\Delta ABC = 4\big(\Delta ADB + \Delta BEC\big).$$

En consecuencia, es posible observar la siguiente relación entre las áreas de los polígonos P_0 y P_1

$$a(P_1) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0).$$

Usando argumentos similares se puede probar que

$$a(P_2) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \frac{1}{4^2}a(P_0),$$

$$\vdots$$

$$a(P_n) = a(P_0) + \frac{1}{4}a(P_0) + \frac{1}{4^2}a(P_0) + \cdots + \frac{1}{4^n}a(P_0), \cdots$$

El siguiente paso consiste en probar que esta sucesión verifica las hipótesis de la proposición X.1. de los Elementos de Euclides. Para ello, se denomina el área del segmento parabólico por S y de esta manera demostrar la convergencia de la sucesión de polígonos inscritos, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe n tal que $S - P_n < \epsilon$. Sea $\square AMNC$, el paralelogramo que circunscribe al segmento parabólico, en el cual AM es paralelo a NC y a BO. Con ayuda de las proposiciones anteriores a la proposición 24 (proposición 2.3), Arquímedes obtiene que

$$a(P_0) = \frac{1}{2}a(\square AMNC), \quad S < a(\square AMNC).$$

De lo anterior sigue que

$$a(P_0) > \frac{1}{2}S, \quad S - P_0 < \frac{1}{2}S.$$

Así, es posible observar que P_0 agotó más de la mitad del área S y empleando razonamientos análogos se puede generalizar el resultado para los otros miembros de la sucesión. Por lo tanto, la sucesión cumple las hipótesis de la proposición XI.1. Finalmente, con ayuda de consideraciones teóricas, se presume el "límite" en la sucesión de figuras inscritas, para luego concluir que dicho "límite" es en efecto igual al área buscada.

El paso siguiente consiste en la búsqueda del límite de la sucesión de figuras inscritas. En general, el procedimiento para la obtención del límite no se especifica; se recurre a la intuición, referido al proceso prueba error, intentando visualizar una ley de formación en la suma. Obviamente, este proceso trasciende la antigüedad, por ejemplo, es interesante observar cómo Fourier lo utiliza para la solución de algunas ecuaciones parciales. Como era de esperarse, no se pudieron lograr métodos algorítmicos, más o menos precisos, hasta el siglo XIX con la definición formal del límite. Observando para este caso el procedimiento seguido por Arquímedes, basándose en los elementos de la matemática contemporánea y las deducciones anteriores, sólo restaría calcular el área del segmento parabólico por medio de la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S.$$

Pero Arquímedes no sabe de convergencia de series ni le hace falta, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega. Para ello hace uso de la llamada propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes. Él supone por contradicción que

$$K < \frac{4}{3} S \quad \text{ó} \quad K > \frac{4}{3} S.$$

En cualquiera de los casos, por medio del principio de convergencia de Eudoxo se llega una contradicción, de donde se concluye que la única posibilidad es

$$K = \frac{4}{3} S,$$

que corresponde al resultado deseado.

Para finalizar, es importante no dejar por alto la riqueza conceptual en los métodos infinitesimales de Arquímedes, los cuales sirvieron de base para los matemáticos de siglos posteriores, especialmente a Cavalieri y a Leibniz. Todos y cada uno de los aportes del genio de Siracusa, desencadenan procesos que aún hoy en día se siguen estudiando, por ejemplo, el tratamiento del infinito, la convergencia de series, el cálculo de áreas por medio de la integral en el sentido de Riemann, entre otros. Además cabe enfatizar que todos estos desarrollos históricos, permiten comprender mejor las definiciones de estos conceptos tan complejos.

Acknowledgments. A. Corredor fue apoyada por la Universidad del Cauca. R. Córdoba fue apoyado por la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Bobadilla, M. (2013). Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico. Tesis de doctorado, Universidad del Valle. 16

[2] González, J. (2006). Orígenes del Cálculo, Historia de las Matemáticas. Universidad de Granada.

[3] Recalde, L. C. (2018). Lecturas de Historia de Las Matemaáticas. Primera edición. Programa Editorial Universidad Del Valle. 15, 16

[4] Vera, F. (1970). Arquímedes, De la cuadratura de la parábola, en Científicos Griegos. Madrid: Aguilar. 13

[5] Vera, F. (1970). Euclides, Elementos de Geometría de Euclides, en Científicos Griegos, Tomo I, Parte c. Madrid: Aguilar. 13