REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen VIII (2008), páginas 15-27

La Semicontinuidad en el Surgimiento de la Teoría de Funciones

Favio Vallejo
Universidad de Nariño

Abstract. In this article deals with the work of French mathematician René Baire and some historical aspects relevant to consider that led to the realm of theory functions as a branch formal mathematics. Will also discuss the concept of semicontinuity, which was instrumental in the development of Baire theory and is regarded as one of the most important concepts of analysis. Finally exhibit obtaining a continuous function, .$^{\rm ex}$otic"which is presumed, is differentiable at best, in a finite number of points within a narrow range.

Keywords. Function continuous, function discontinuous, semicontinuity, continuity, differentiability, classes of Baire.

Resumen. En el presente artículo se aborda el trabajo del matemático francés René Baire y algunos aspectos históricos relevantes que condujeron a considerar al campo de la teoría de funciones como rama formal dentro de las matemáticas. También se hablará del concepto de semicontinuidad, el cual desempeñó un papel decisivo en el desarrollo de la teoría de Baire y además es considerado como uno de los conceptos mas importantes del análisis. Finalmente se exhibirá la obtención de una función continua, .$^{\rm ex}$ótica"que se presume, es diferenciable a lo sumo, en un número finito de puntos dentro de un intervalo acotado.

Palabras Clave. Funciones continuas, funciones discontinuas, semicontinuidad, diferenciabilidad, continuidad, Clases de Baire.

Introducción

Históricamente, el trabajo de René Baire sobre funciones discontinuas, publicado en 1899 tiene gran relevancia, pues contribuyó, al afianzamiento de un nuevo campo en proceso de surgimiento, La teoría de funciones. Este proceso tuvo su origen en los trabajos de Cauchy publicados en 1821, y que se pueden definir como un tratado de funciones continuas. Por otra parte, para Cauchy y en general gran parte de la comunidad matemática francesa de los siglos XVIII y XIX consideraba el campo de las funciones discontinuas como estéril y poco interesante para estudiar. En este sentido se expondrá la importancia de los estudios de René Baire en la reivindicación de las funciones discontinuas destacando, el papel que desempeñaron los estudios de Cauhy en la obra de Baire. Se presenta además, aspectos referentes al concepto de semicontinuidad el cual fue fundamental en la formulación y demostración de los principales resultados obtenidos por Baire. Finalmente se exhibirá la obtención de una función continua, que se presume, es diferenciable a lo sumo, en un número finito de puntos dentro de un intervalo acotado, esto con el objetivo de mostrar que si bien el conjunto de las funciones discontinuas es mucho mas amplio que el conjunto de las funciones continuas, aun asi, este último constituye un gran campo de estudio, como históricamente se ha mostrado.

1. Apartes Historicos

En 1821 Cauchy publica su libro *Curso de Análisis* en el cual define función continua y en adelante se adentra en el estudio de este tipo de funciones, haciendo a un lado las funciones con alto grado de discontinuidad. La tendencia de Cauchy hacia el estudio de las funciones continuas, probablemente se veía estimulada, por el hecho de que las funciones que modelan la mayoría de fenómenos naturales son continuas. Lo cierto es que las funciones discontinuas fueron condenadas a un ostracismo por parte de los matemáticos franceses de principios del siglo XIX. Es importante notar que esta tendencia hacia el estudio de las funciones continuas no sólo estaba presente en Cauchy sino también en gran parte de los matemáticos franceses.

Lo continuo estuvo tan arraigado en la mente de Cauchy que lo llevó a formular y a probar dos famosos teoremas conocidos como teoremas falsos de Cauchy. A continuación se presenta lo referente al "primer teorema falso de Cauchy".

1.1. Primer teorema falso de Cauchy

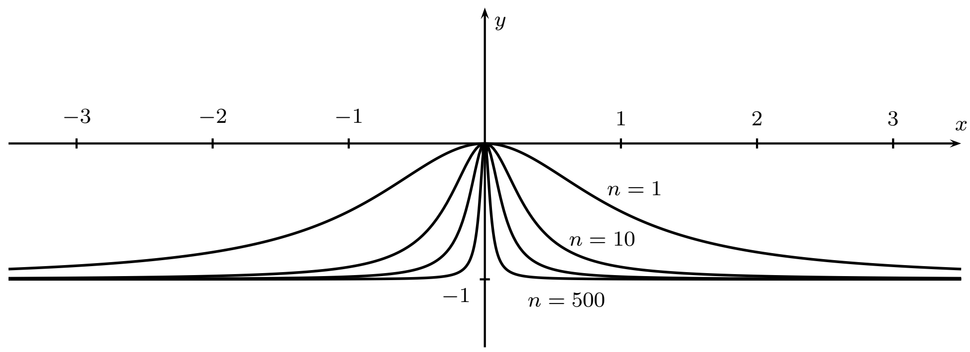
El primer teorema falso surge en estudios referentes a series de funciones continuas. En su obra mencionada anteriormente Cauchy formula y demuestra el siguiente resultado:

Primer teorema falso: Si la sucesión $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge, donde cada cada f_n es continua entonces la función límite es continua.

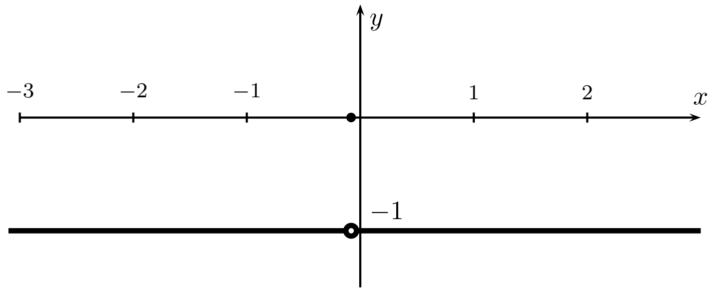
Sin embargo se pueden exhibir varios contraejemplos: Sea la sucesión

$$f_n(x) = -\frac{nx^2}{nx^2 + 1}$$

Se presenta a continuación las gráficas de las funciones que toma la sucesión para $n = 1, 10, 50, 500$:



la serie converge a:



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

A pesar de que f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, esta sucesión converge a una función discontinua, particularmente en $x = 0$.
Debido a éste y a otros contraejemplos detectados, el teorema 1.1 fué conocido como *primer teorema falso de Cauchy*.

El *primer teorema falso de Cauchy* fue el centro de interés de muchos matemáticos franceses de la época, quienes bajo su tendencia por lo continuo, trataban de establecer las condiciones para que una sucesión convergente de funciones continuas fuese también una función continua [1], así como también detectar el error que Cauchy cometido en la demostración del teorema. De la discusión en torno a este teorema surgió el concepto de convergencia uniforme y al mismo tiempo se determinó que si a la hipótesis del teorema, se agrega la condición de la convergencia uniforme de la sucesión, el teorema resulta válido.

1.2. Baire y el primer falso teorema de Cauchy

No todos los matemáticos franceses que se interesaron por el *primer teorema falso de Cauchy* tuvieron el mismo objetivo. En 1897, René Baire lo abordó, pero en sentido contrario al de sus colegas, en contra de la tradición francesa de la búsqueda del continuismo, Baire se preguntó:

> ¿Qué condiciones debe cumplir una función discontinua para poderse expresar como el límite de una sucesión de funciones continuas ?

El interés de Baire generó un cambio en la tendencia de los matemáticos franceses respecto a las funciones continuas, pues sus trabajos revelarían la importancia y la vastedad del campo de las funciones discontinuas.

Los esfuerzos de René Baire por responder a esta pregunta, lo condujeron a formular el siguiente teorema:
Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función discontinua. f es el límite de una sucesión de funciones continuas, si y sólo si es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto[2].
En adelante denominaremos a este teorema como **T1**
No obstante, el trabajo de Baire en torno a las funciones discontinuas no terminó con la formulación de este teorema. De tiempo atrás se conocía la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

Esta función se denomina *función característica de los racionales* restringida al intervalo $[0,1]$. Obsérvese que f no es puntualmente discontinua ya que es discontinua en todos los

[1] Es decir establecer las condiciones bajo las cuales el primer teorema falso es valido.

[2] $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es puntualmente discontinua, si para todo $(a,b) \subset I$, existe $c \in (a,b)$ tal que f es continua en c. $P \subset \mathbb{R}$ es perfecto, si $P = P'$, donde P' es el conjunto de puntos de acumulación de P.

puntos de su dominio, en consecuencia, esta función no puede verse como limite de una sucesión de funciones continuas, sin embargo, lo que hizo que Baire dirigiera su atención hacia esta función fue una propiedad particular que esta posee, y es la siguiente:
Consideremos la siguiente sucesión de funciones tal que:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \in \mathbb{Q} \text{ con } (p,q) = 1 \text{ y } q \leq n \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En donde $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. En [2] se demuestra que para cada n, f_n es puntualmente discontinua y que sorprendentemente, la sucesión f_n así definida converge a la función característica de los racionales:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$$

Es decir, la función característica de los racionales, que no es puntualmente discontinua, puede verse como el límite de una sucesión convergente de funciones puntualmente discontinuas. La pregunta que surge de manera natural en analogía con el primer interrogante que Baire se hizo es:

> ¿Qué propiedades particulares tienen las funciones discontinuas que no son puntualmente discontinuas, que hacen que dichas funciones se puedan ver como el límite de sucesiones convergentes de funciones puntualmente discontinuas?

Este nuevo interrogante y el anterior motivaron en gran parte los trabajos de René Baire pues lo condujeron a establecer una clasificación de funciones en clases, que hoy conocemos como *Clases de Baire*. Esta clasificación de funciones es de suma importancia, pues los trabajos de Baire giran en torno a ella.

2. Clases de Baire

Los interrogantes que Baire había abordado desde 1897 lo llevaron a formular una clasificación de funciones en el año de 1899 en su tesis doctoral [3]. El objetivo central de Baire era utilizar la convergencia puntual para construir, en un proceso iterativo, funciones de clases superiores, o de grado de discontinuidad cada vez más complejo, tomando como base o primer nivel a las funciones continuas. En este sentido incorpora su clasificación de funciones:

C_0 : *Clase* 0, constituida por las funciones continuas.

C_1 : *Clase* 1, conformada por las funciones que no pertenecen a C_0 y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a C_0.

C_2 : *Clase* 2, conformada por las funciones que no pertenecen ni a C_0 ni a C_1, y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a las clases C_0 y C_1.
$\vdots$
C_n : *Clase* n, conformada por las funciones que no pertenecen a ninguna clase anterior a C_n, y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a las clases anteriores.
$\vdots$
Baire, no sólo define clases de funciones de orden natural como las que se acaba de definir, ya que, apoyándose en los ordinales trasfinitos de la teoría cantoriana, define las *clases de funciones* de orden trasfinito como se detalla a continuación:

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que para todo n, existe i tal que $f_n \in C_i$; además, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, donde $f \notin C_i$ para todo i, entonces se tiene que $f \in C_\omega$, donde ω es el primer ordinal trasfinito de la teoría cantoriana. De la misma forma se definen $C_{\omega+1}$,$C_{\omega+2}$,...$C_{2\omega}$,...[3]

3. Conjetura de Baire

Ya establecida su clasificación de funciones, Baire se propone evidenciar la existencia de funciones de cada una de las clases que acaba de definir, propósito que se denomina *conjetura de Baire*. Para ello trató de formular propiedades que permitan caracterizar funciones de cada clase.

La definición de continuidad caracteriza a las funciones de clase C_0, es decir, cualquier función continua es de clase C_0 y viceversa. De la misma manera el teorema **T1** sirve para caracterizar a las funciones de clase C_1. Para las funciones de clase C_2 Baire planteó el siguiente teorema llamado **T2**:

T2: Una función f es de segunda clase si y sólo si f es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría [4] con respecto al conjunto perfecto.

Sin embargo de **T2**, Baire sólo pudo demostrar la condición necesaria, es decir: Si una función es de clase C_2 entonces es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría con respecto al conjunto perfecto. En 1914, el matemático ruso Nicolas Lusin, probaría que la condición suficiente de **T2** no se cumple.

En resumen Baire sólo había podido caracterizar funciones de clase C_0, C_1 y parcialmente de C_2, No obstante en 1905 obtuvo una función de C_3, pero en términos generales, no pudo caracterizar las funciones de las clases superiores. Sin embargo Baire conjeturó que **T2** era cierto y que una generalización de **T2** caracterizaría las funciones de las clases restantes, inclusive hasta el nivel trasfinito. De esta manera, Baire propone la generalización de **T2** como método para validar su conjetura.

Casi 20 años después de la formulación de las clases de Baire, la matemática Rusa Ludmila Keldych logro exhibir una función de clase C_4, sin embargo, no se pudieron caracterizar funciones de las clases restantes. Mas tarde Lusin probaría la validez de la conjetura.

4. Semicontinuidad

El concepto de semicontinuidad es muy importante en la obra de Baire, pues es en base a este concepto, que él soporta las demostraciones de sus principales resultados en torno a las funciones discontinuas. Si bien, el primer teorema falso de Cauchy le permite a Baire

[3] Estos ordinales trasfinitos se originaron debido a la imposibilidad de establecer una completa jerarquía de ciertos conjuntos derivados en su orden de constitución, a partir de los ordinales correspondientes a los números naturales, tal como puede referenciarse en [2] pï¿½gs 11-13. En forma general se define ω como el menor ordinal trasfinito mayor que cualquier número natural. Ahora bien, para generar mas ordinales trasfinitos a partir de ω, se adiciona una unidad o también a través de sucesiones de ordinales naturales como se presenta a continuación: $\omega, \omega+1, \omega+2, ..\omega+n, ..., \omega+\omega = 2\omega, 3\omega, ..., n\omega, ..., \omega.\omega = \omega^2, ..., \omega^\omega, ...$

[4] $E \subset R$ es de *primera categoría* si existe una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos diseminados (conjuntos que no son densos en ninguna parte), tal que para todo $x \in E$, existe n tal que $x \in E_n$. En otro caso, se dice que E es de *segunda categoría*.

adentrase en el campo de las funciones discontinuas, el segundo falso teorema de Cauchy, que se detalla a continuación, es el que le proporciona un poderoso concepto para abordar los problemas referentes a las funciones discontinuas, dicho concepto es: *la semicontinuidad*. En 1896 Baire aborda el segundo teorema falso de Cauchy. En su *Course de analysis* Cauchy formula y "prueba.el siguiente resultado:
Si una función de varias variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es continua en cada una de sus variables $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces es continua.
Baire encuentra contraejemplos como este:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta funciï¿½n, en $(0,0)$ es continua respecto a cada una de las variables x y y, en efecto: si $x \neq 0$ entonces $f(x,0) = \dfrac{4x(0)^2}{x^2+0^4} = 0$,[5] por tanto $f(x,0) = 0$ que es continua en $(0,0)$, es decir, f es continua respecto a x en $(0,0)$.
De forma similar si $y \neq 0$ entonces $f(0,y) = \dfrac{(0)y^2}{0^2+y^4} = 0$, por tanto $f(0,y) = 0$ que es continua en $(0,0)$, es decir, f es continua respecto a y en $(0,0)$, sin embargo f es discontinua en tal punto. En resumen, se tiene que en $(0,0)$, f es discontinua pero continua respecto a cada variable x y y.

Detectadas las funciones contraejemplo, Baire se enfoca en el estudio de éstas. En sus investigaciones sobre las propiedades de éstas, Baire obtiene por primeras vez funciones semicontinuas de una variable. El proceso que sigue Baire, para tal fin es el siguiente:

Sea $f : [-a,a] \times [-b,b] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funciï¿½n de dos variables tal que:

1. f es acotada en $[-a,a] \times [-b,b]$
2. f es discontinua pero continua con respecto a cada una de sus variables x y y [6].

Sea $x_0 \in [-a,a]$ y consideremos la función $m : [-a,a] \to \mathbb{R}$ que se define como:

$$m(x) = \sup_{y \in [-b,b]} f(x,y)$$

m está bien definida puesto que f es acotada y en consecuencia se asegura la existencia del supremo. Así, para x_0 se tiene:

$$m(x_0) = \sup_{y \in [-b,b]} f(x_0,y)$$

f es continua respecto a y, es decir $f(x_0,y)$ es continua, por tanto existe y_0 tal que:

$$f(x_0,y_0) = m(x_0)$$

Como f es continua respecto a x entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \rho \quad \text{entonces} \quad |f(x_0,y_0) - f(x,y_0)| < \varepsilon.$$

[5] Si $x = 0$, se tiene que $f(x,0) = f(0,0) = 0$
[6] En adelante esta condición se denominara: Condición 1

$m(x_0) = f(x_0, y_0)$ si tomamos la diferencia $f(x_0, y_0) - f(x, y_0) < \varepsilon$ entonces $m(x_0) - f(x, y_0) < \varepsilon$, es decir:

$$m(x_0) < f(x, y_0) + \varepsilon \leq m(x) + \varepsilon \quad \text{ya que} \quad m(x) \geq f(x, y_0)^{7}$$

$$m(x_0) < m(x) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

que es lo mismo que

$$m(x) > m(x_0) - \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

Baire llamó a las funciones con esta característica particular de m como **semicontinuas inferiormente**.

De manera análoga, Baire obtiene funciones de una variable que posteriormente denominará semicontinuas superiormente. Así, si tomamos:

$$I(x_0) = \inf_{y \in [-b,b]} f(x_0, y)$$

Por un procedimiento similar se tiene:

$$I(x) < I(x_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

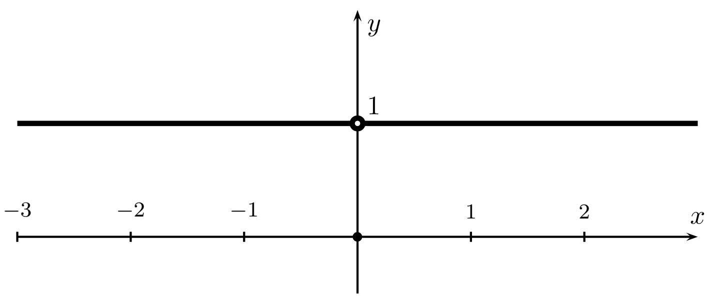
A las funciones que cumplían con esta propiedad de I, Baire las denominó **semicontinuas superiormente**

Para la función:

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

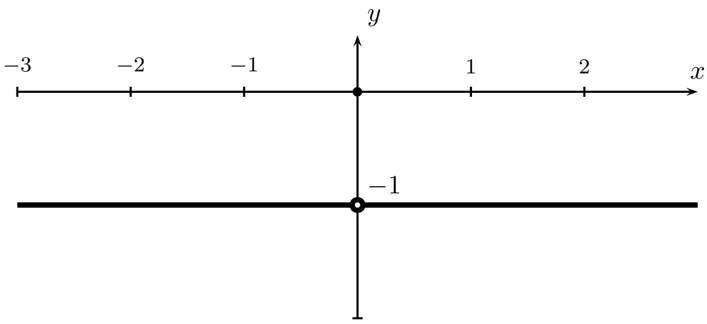
se tiene que:

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



m es semicontinua inferior.

$$I(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



[7] propiedad de supremo

I es semicontinua superior.

Sin embargo, el apelativo de funciones semicontinuas, no es mera coincidencia puesto que hay una estrecha relación entre semicontinuidad y continuidad:
Sea $f : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T un intervalo. f es continua si y solo si f es semicontinua superior y semicontinua inferior.
Retomemos ahora las funciones m e I, en $x = 0$ la función m es sólo semicontinua inferior, mientras que en el mismo punto, la función I es sólo semicontinua superior. En este sentido puede entenderse el apelativo de funciones *semicontinuas*, ya que en esencia Baire quiere dar a entender que existen funciones que son parcialmente continuas o *"que cumplen con una sola de las condiciones que en conjunto constituyen la continuidad"* ([1], pag 68).

Utilizando las funciones de dos variables que constituyen contraejemplos al segundo teorema falso de Cauchy, Baire aborda la demostración del teorema **T1**, específicamente se propone demostrar la condición necesaria de este teorema:

Sea f una función discontinua de variable real. Si f es el límite de una sucesión de funciones continuas entonces f es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.

Para la demostración, Baire se propone 3 problemas, pero sólo detallaremos el problema que muestra la relación con funciones de dos variables anteriormente estudiadas:

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, donde $A = \{(x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ 0 \leq y \leq \gamma\}$ y $f(x, y)$ continua para todo punto de A excepto para los puntos sobre el eje x $(y = 0)$ en los cuales la función es sólo continua con respecto a y. El problema consiste en determinar cómo es la función sobre el eje x. Este problema es denominado por [5] como P_2.

El objetivo de Baire es expresar las hipótesis de la condición necesaria de **T1** en función de las condiciones del problema expuesto, para ello toma una sucesión decreciente que converge a 0, en particular tómese $\dfrac{1}{n}$ y defínase la sucesión de funciones:

$$g_n(x) = f\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

g_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$ puesto que f es continua para todo punto de A excepto en el eje $x(y = 0)$, donde f es discontinua, sin embargo no hay problema, ya que g_n no toma valores sobre el eje x pues $y = \frac{1}{n} \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Como $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0 se tiene que:

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x, 0)$$

y como en el eje x f es sólo continua respecto a y entonces $f(x, 0)$ es discontinua. En resumen, se tiene una sucesión convergente de funciones continuas de variable real g_n que converge a una función discontinua. De esta manera, *Baire ha çamuflado"las condiciones necesarias de T_1 en los requerimientos de P_2. Lo cual significa que la solución a P_2 comporta la determinación de las condiciones necesarias de T_1* ([5], pag 76). Gracias a la incorporación de funciones de dos variables en la demostración de **T1** Baire introduciría el concepto de semicontinuidad como elemento definitivo en dicha demostración.

5. El vasto campo de las funciones

El conjunto de las funciones se constituye por dos grandes familias: la de las funciones continuas y la de las funciones discontinuas. En este sentido, las *clases de Baire* nos muestran la gran diversidad de las funciones discontinuas respecto a las continuas, puesto que estas últimas corresponden a un solo peldaño de infinitos pertenecientes a dicha clasificación. Pese a ésto, el conjunto de las funciones continuas ha constituido históricamente un gran campo de estudio. Para dar cuenta del porque de esto último, se exhibiría una función continua, que se presume, diferenciable a lo sumo en un conjunto finito de puntos dentro de un intervalo acotado.

Descripción del procedimiento

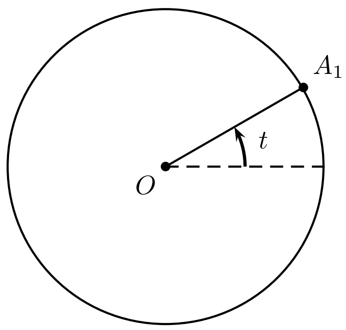
Sea un punto O en el plano, y consideremos la sucesión de segmentos:

$$\overline{OA_1},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ ...,\ \overline{A_{n-1}A_n}$$

con las siguientes propiedades:

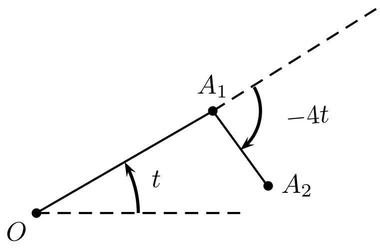
- El segmento $\overline{OA_1}$ rota un ángulo de t radianes alrededor de O en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- $A_{i-1}A_i = \frac{A_{i-2}A_{i-1}}{2}$, $1 \leq i \leq n$.
- Cada segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$ rota alrededor del punto A_{i-1} un ángulo de -4θ, siendo θ el ángulo que rota el segmento inmediatamente anterior.[8]

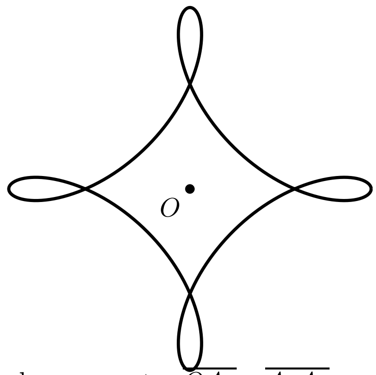
de esta manera, para $n = 1$, se tiene un solo segmento $\overline{OA_1}$ y si se toma a t como un parámetro positivo variable, entonces el lugar geométrico descrito por A_1 es una circunferencia:



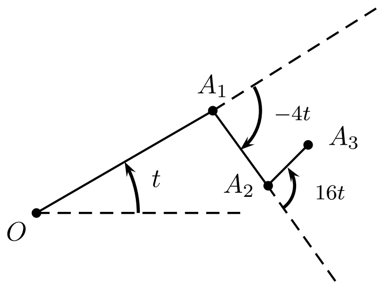
para $n = 2$, se tiene dos segmentos, el primero $\overline{OA_1}$ que rota t radianes alrededor de O, y el segmento $\overline{A_1A_2}$ que de acuerdo a la definición, su longitud es la mitad de la del segmento $\overline{OA_1}$ y rota $-4t$ radianes alrededor de A_1. A continuación se presenta el lugar geométrico descrito por A_2:

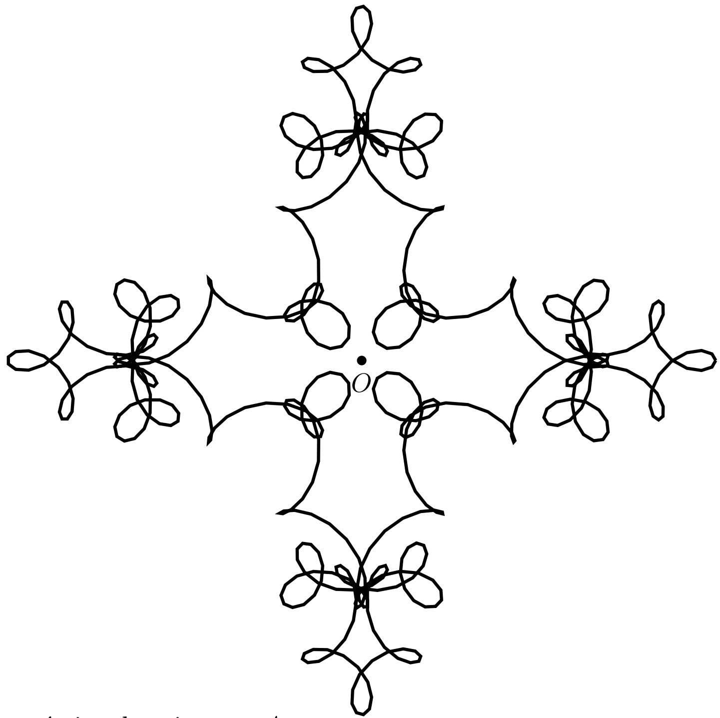
[8]Se puede tomar un ángulo de $a\theta$, $a \in \mathbb{R}$. En este caso, $a = -4$





para $n = 3$, se tienen 3 segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_1A_2}$: los segmentos $\overline{OA_1}$ y $\overline{A_1A_2}$ cumplen con las mismas propiedades para el caso $n = 2$ y el segmento $\overline{A_2A_3}$ tiene la mitad de la longitud del segmento anterior que es A_1A_2 y rota alrededor de A_2 un ángulo de $-4(-4t) = 16t$ radianes. el lugar geométrico descrito por A_3 seria:





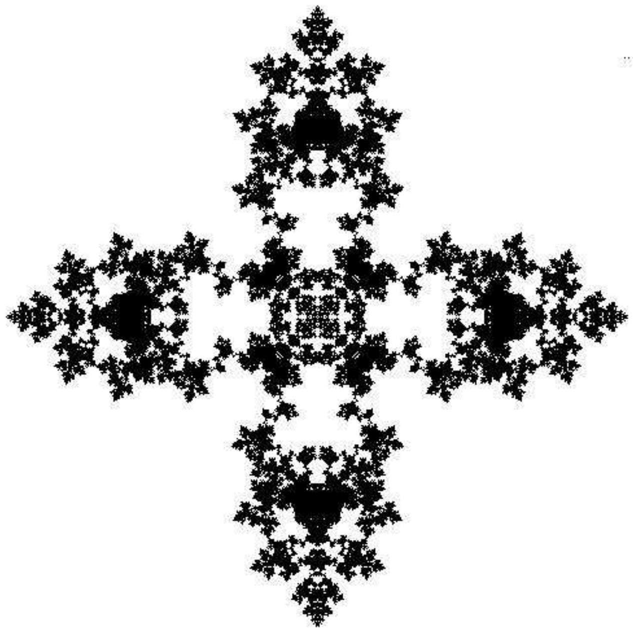
ahora bien, para $n = 20$, el lugar geométrico descrito por A_{20} es:
En resumen, lo que se tiene es una sucesión de lugares geométricos que depende del número n de segmentos que se tome. Si ahora trazamos unos ejes cartesianos cuyo origen sea O, y tomamos $OA_1 = 1$, entonces la ecuación paramétrica del lugar geométrico descrito por A_n sería:

$$L_n(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} cos \left(t \frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right), \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} sin \left(t \frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right) \right)$$

t es el ángulo que rota el segmento $\overline{OA_1}$.

Tomemos ahora la abscisa x_n de L_n, es decir:

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} cos \left(t \frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right)$$



si $n \to \infty$ se tiene la funciï¿½n:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)$$

la cual esta definida para todo nï¿½mero real pues converge uniformemente para cada t real ([7] pag 271, 272).

Para f se tiene que $g_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$ y como la serie converge uniformemente, entonces f es continua para todo t[9].

Respecto al estudio de la diferenciabilidad de f, se ha demostrado que para los puntos de la forma $t \neq 5\pi k$, $k \in \mathbb{N}$ la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)\right)$$

diverge, hecho que aunque no es definitivo, permite conjeturar que en los puntos de la forma $t \neq 5\pi k$ f no es diferenciable. Bajo el mismo supuesto se conjetura que en los puntos $t = 5\pi k$ la funciï¿½n f es diferenciable y la derivada es cero.

Si en la terecera condición que define a la sucesión de segmentos se toma en vez de -4, cualquier número real $a \in (-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ se obtiene una familia de funciones similares a f.

En términos generales, las funciones continuas no diferenciables constituyen un campo de estudio muy interesante que nos muestra la gran riqueza del conjunto de las funciones continuas, lo cual es muy significativo si se tiene en cuenta que las funciones discontinuas

[9] La converegencia uniforme de la serie, hace que la continuidad de cada g_n se transfiera a la función límite

comprenden un terreno mucho mayor.

El trabajo de Baire es muy relevante, pues la importancia que le da a las funciones discontinuas, la concibe a partir de uno de los problemas mas cruciales en el siglo XIX: la convergencia de series de funciones, y además, logra incorporar la teoría cantoriana de conjuntos como eje director en sus principales desarrollos.

Referencias

[1] ARBOLEDA, L., RECALDE, L.(2005) *El concepto de semicontinuidad de Baire en las investigaciones de Fréchet.* vol XIII. Matemï¿½ticas: Enseï¿½anza Universitaria, pp.63-82.

[2] CHAVES, Andrés. *Las clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos.* Tesis de Maestria. Universidad del Valle. 2006

[3] BAIRE, René. *Sur les Fonctions de variables realles. Annali di matem.pura ed appl.*, (3), 3(1899), pp. 1-123. (*Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars, Paris, 1990, pp. 49-173*).*

[4] CAUCHY, Augustin Louis. (1821) *Cours d'analyse de l'ï¿½cole Royale Polytechnique*, Imprimírie Royale, Paris. Traducción al espaï¿½ol; *Curso de Análisis*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994.

[5] RECALDE, Luis. *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas.* Tesis de doctorado. Universidad del Valle. 2003

[6] RECALDE, Luis. *La teoría de funciones de Baire: La constitución de los discontinuo como objeto matemático.* Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. 2004, Cali.

[7] APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático.* Vol 2. Editorial Reverté S.A, Barcelona.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Narino
e-mail: `fabio254@gmail.com`