REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen VIII (2008), páginas 28-34

El Principio del Máximo

Miller Cerón Gómez[1]

Abstract. This article introduce the basic definition of maximun principle, it's aplicability to the differential equations, In particular, the lineal ordinary differential equations of second order and the parabolic lineal differential equation named heat equation, moreover we probe this principle in known way but using a auxiliary diferent function

Keywords. Differential operator, differential inequality, boundary value problem

Resumen. En éste artículo presentamos la definición básica del principio del máximo, su aplicabilidad a las ecuaciones diferenciales, en particular a las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden y la ecuación diferencial lineal parcial parabólica llamada ecuación del calor, además mostraremos éste principio en su forma más conocida utilizando una función auxiliar diferente.

Palabras Clave. Operador diferencial, desigualdad diferencial, problema de valores en la frontera

Introducción

El principio del máximo es una de las herramientas más utiles en el estudio de las ecuaciones diferenciales debido a que nos permite obtener información de la solución de una ecuación diferencial sin conocerla explicitamente; por ejemplo, obtener la unicidad de éstas soluciones y obtener cotas o aproximaciones de soluciones. Este principio no es más que la generalización del siguiente hecho elemental del cálculo: Dada cualquier función f la cual satisface la desigualdad $f'' > 0$ sobre un intervalo (a, b) que alcanza su valor máximo en los extremos del intervalo, o de forma más general diremos que una función f sartisface o cumple con el principio del máximo o tiene la propiedad del máximo si ésta satisface una desigualdad diferencial en un dominio D y alcanza su máximo en la frontera de D.
El principio del máximo aparece de diferentes formas y con numerosas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales, aqui sólo lo aplicaremos a las ecuaciones direnciales ordinarias lineales de segundo orden y las ecuaciones diferenciales lineales parciales parabólicas.

[1]Profesor Tiempo Completo Ocasional Universidad de Nariño Pasto-Nariño- Colombia

1. Principio del Máximo en una Dimensión

Una función $u(x)$ que satisface la desigualdad diferencial en un intervalo abierto (a,b)

$$L(u) \equiv u'' + g(x)u' > 0, \quad \text{para} \quad x \in (a,b) \tag{1.1}$$

donde $g(x)$ es una función acotada, no puede alcanzar su valor máximo en un punto interior al intervalo $[a,b]$, es decir si (1.1) se cumple entonces la función u alcanza su máximo en los extremos del intervalo. Esto es fácil de probar, pues si suponemos que la función u alcanza su valor máximo en un punto $c \in (a,b)$, entonces del cálculo elemental tenemos que:

$$u'(c) = 0 \ \text{ y } \quad u''(c) \leq 0 \tag{1.2}$$

pero entonces no cumpliría la desigualdad (1.1). Con base en la anterior observación probaremos el siguiente Teorema:

Teorema 1.1. *Supongamos que $u = u(x)$ es una función no constante la cual satisface la desigualdad differential $L(u) \equiv u'' + g(x)u' \geq 0$ en (a,b) y tiene derivadas laterales en a y en b, y supongamos además que g es una función acotada en cada subintervalo cerrado de (a,b).*

- *a.) Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = a$ y g está acotada a la izquierda de $x = a$, entonces $u'(a) < 0$.*
- *b.) Si el máximo de u se alcanza en un punto $x = b$ y g está acotada a la derecha de $x = b$, entonces $u'(b) > 0$.*

Demostración. Supongamos que $u(a) = M$ y $u(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ y que además existe un punto d en (a,b) para el cual se tiene que $u(d) < M$. Sea z la función auxiliar definida de la siguiente manera:

$$z(x) = (x - a + 1)^\alpha, \quad \text{con} \quad \alpha > 0.$$

Escojamos α de tal manera que $\alpha > 1 - g(x)(x - a + 1)$ para $a \leq x \leq d$, de ello se tiene que $L(z) > 0$ para $a \leq x \leq d$ como se puede comprobar trivialmente. Observe que siempre podemos escoger α porque $g(x)$ es acotada en cada subintervalo cerrado de (a,b). Para la función definida por

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x),$$

donde ϵ es una constante que satisface la desigualdad

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Tenemos que $L(w) > 0$ para $a < x < d$, entonces el máximo de la función w se alcanza en a o en d. Pero como

$$w(a) = M + 1 > w(d),$$

Entonces el máximo ocurre en $x = a$. Por lo tanto, la derivada por la derecha de a de la función w debe ser negativa:

$$w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0.$$

Sin embargo $z'(a) = \alpha > 0$, entonces

$$u'(a) < 0.$$

☑

Si el máximo ocurre en $x = b$, se demuestra de manera similar.

Ahora mostremos el principio del máximo con ayuda del anterior teorema.

Teorema 1.2 (Principio del Máximo en una Dimensión). *Supongamos que u satisface la desigualdad diferencial*

$$L(u) = u'' + g(x)u' \geq 0 \quad \textit{para} \quad a < x < b,$$

donde g es una función acotada. Si el máximo M de la función u se alcanza en un punto interior c de (a, b), entonces u es constante, es decir, $u \equiv M$

Demostración. Supongamos que u es una función que no es constante y que toma su máximo M en un punto $c \in (a, b)$, entonces del cálculo elemental tenemos que $u'(c) = 0$, pero si aplicamos el item a.) del Teorema 1.1 al intervalo (c, b) tenemos que $u'(c) < 0$ de manera similar el item b.) del teorema aplicado al intervalo (a, c) nos garantiza que $u'(c) > 0$, por lo tanto la función u no puede alcanzar su máximo en un punto interior al intervalo (a, b) ☑

Teorema 1.3 (Principio del Mínimo en una Dimensión). *Supongamos que u satisface la desigualdad diferencial*

$$L(u) = u'' + g(x)u' \leq 0 \quad \textit{para} \quad a < x < b,$$

donde g es una función acotada. Si el mínimo m de la función u se alcanza en un punto interior c de (a, b), entonces u es constante, es decir, $u \equiv m$

Demostración. Basta con aplicar el teorema (1.2) a la función $-u$ ☑

Nota 1.1. *El requerimiento de que g sea acotada es necesario en los teoremas anteriores, por ejemplo si consideramos el problema:*

$$u'' - \cot x u' = 0,$$

en el intervalo $(-1, 1)$, cuya solución está dada por $u = \cos x$. Vemos que a pesar de ésto, el máximo de la función $u = \cos x$ se alcanza en $x = 0$, lo cual es una clara violación al teorema (1.2), el mismo problema ocurrre para el teorema (1.1) sobre el intervalo $[0, 1]$, porque $u'(0) = 0$

El principio del máximo puede ser considerado en forma más general si consideramos un operador diferencial de la forma

$$T \equiv \frac{d^2(\cdot)}{dx} + g(x)\frac{d(\cdot)}{dx} + h(x)(\cdot)$$

Teorema 1.4. *Sea u función que satisface la desigualdad diferencial $T(u) \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0$ en el intervalo (a, b) con $h(x) \leq 0$, g y h acotadas. Si u alcanza un máximo no negativo en un punto interior al intervalo (a, b). Entonces u es constante.*

El cual puede ser mostrado en forma directa utilizando la ideas aplicadas en el teorema 1.1.

Ahora mostremos la unicidad de soluciones para el problema de valores en la frontera:

$$\begin{cases} u'' + g(x)u' + h(x) = f(x) & \text{en } a < x < b \\ u(a) = k_1, \ \ u(b) = k_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

donde f, g y h son funciones dadas, con g y h acotadas; k_1 y k_2 constantes.

Teorema 1.5. *Si el problema de valores en la frontera (1.3) tiene solución y $h(x) \leq 0$ en (a, b). Entonces ésta es única.*

Demostración. Supongamos que las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones de (1.3). Entonces $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ es una solución del problema de valores en la frontera siguiente:

$$\begin{cases} u'' + g(x)u' = 0 & \text{en } a < x < b \\ u(a) = 0, \;\; u(b) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

De acuerdo al teorema (1.4), la función $u(x) \leq 0$ en (a, b). lo mismo ocurre con la función $-u(x)$ pues esta también soluciona el problema de valores en la frontera anterior, por tanto, si aplicamos el teorema (1.4), tenemos que $u(x) \geq 0$ en (a, b). Entonces $u \equiv 0$ en (a, b) ☑

2. Principio del Máximo para la Ecuación de Calor

Definición 2.1. *La ecuación diferencial parcial parabólica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

se llama la Ecuación del Calor.

Sea $u(x, t)$ una función que satisface la desigualdad diferencial

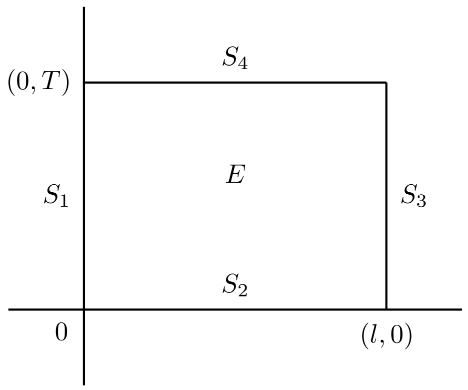
$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0 \tag{2.1}$$

en una region rectangular $E : \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ del plano xt. Como en la primera sección, podemos observar aqui, que la función u no puede tomar el máximo en un punto interior de E, porque en éste punto, tendríamos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \;\; \text{y} \;\; \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

lo cual sería una clara violación a (2.1).
Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 los lados de la región rectangular E definidos por:

$$\begin{array}{ll} S_1 : \{x = 0, 0 \leq t \leq T\} & S_2 : \{0 \leq x \leq l, t = 0\} \\ S_3 : \{x = l, 0 \leq t \leq T\} & S_4 : \{0 < x < l, t = T\} \end{array} \tag{2.2}$$



Teorema 2.2. *Sea $u(x,t)$ una función que satisface la desigualdad diferencial*

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0, \tag{2.3}$$

en la región rectangular E definida anteriormente. Entonces el máximo de u sobre $E \cup \partial E$ debe ocurrir en uno de los tres lados S_1, S_2 o S_3

Demostración. Supongamos que M es el máximo de los valores de u sobre S_1, S_2 y S_3. y además que existe un punto $(x_0, t_0) \in E$ donde u tiene un valor $m > M$. Sobre $E \cup \partial E$ definamos la función

$$w(x,t) = u(x,t) - \epsilon \frac{(t-t_0)}{T} \quad \text{con} \quad 0 < \epsilon < m - M. \tag{2.4}$$

Para todos los puntos de S_1, S_2 y S_3, tenemos que

$$w(x,t) = u(x,t) - \epsilon \frac{(t-t_0)}{T} \leq M + \epsilon < m, \tag{2.5}$$

además

$$w(x_0, t_0) = m \tag{2.6}$$

y

$$L(w) = L(u) + \frac{\epsilon}{T} > 0 \tag{2.7}$$

Las condiciones (2.5) y (2.6), muestran que w debe asumir su máximo en el punto interior de E o en S_4.
Pero, debido a la desigualdad (2.7), la función w no puede alcanzar su valor máximo en E. Entonces si el máximo V se toma en S_4, es decir, existe un punto $(x_1, t_1) \in S_4$ tal que $w(x,t) \leq V$ para $(x,t) \in E \cup S_4$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 w(x_1, t_1)}{\partial x^2} \leq 0, \tag{2.8}$$

de (2.4), podemos ver que,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.9}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\epsilon}{T} \tag{2.10}$$

Ahora (2.8)y (2.9) implican que

$$\frac{\partial^2 u(x_1, t_1)}{\partial x^2} \leq 0, \tag{2.11}$$

mientras que de (2.11) y (2.3) tenemos que

$$\frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial t} \leq 0. \tag{2.12}$$

Finalmente, (2.10) y (2.12) implican que

$$\frac{\partial w(x_1, t_1)}{\partial t} \leq 0. \tag{2.13}$$

. Sin embargo, ya que (x_1, t_1) es un máximo de $w(x,t)$, se debe tener

$$\frac{\partial w(x_1, t_1)}{\partial t} \geq 0.$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto $M > m$. ☑

Nota 2.1. *De manera similar podemos probar que el principio del minimo, si $L(u) \leq 0$ en E, entonces el mínimo de u sobre $E \cup \partial E$ debe ocurrir en uno de los tres lados S_1, S_2 0 S_3. Pues basta con tomar la función $-u$ y aplicar el teorema anterior.*

Ahora consideremos el problema de valor inicial y de frontera:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = f(x,t) & \text{en } E \\ u(0,t) = g_1(t) & \text{en } S_1, \\ u(x,0) = g_2(x) & \text{en } S_2, \\ u(l,t) = g_1(t) & \text{en } S_3, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde las funciones f, g_1, g_2 y g_2 son continuas en las regiones de definición.

Teorema 2.3. *Si el problema de valor inicial y de frontera (2.15), tiene solución. Entonces ésta es única*

Demostración. Sean $u_1(x,t)$ y $u_2(x,t)$ al problema (2.15). Entonces $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ es una solución del problema de valor inicial y de frontera siguiente:

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & \text{en } E \\ u(0,t) = 0 & \text{en } S_1, \\ u(x,0) = 0 & \text{en } S_2, \\ u(l,t) = 0 & \text{en } S_3, \end{cases} \tag{2.15}$$

y toma su máximo y su mínimo valor sobre $S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Pero, sobre $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $u(x,t) = 0$, asi que $u(x,t) = 0$ en $E \cup \partial E$. Por lo tanto $u_1 = u_2$ ☑

Nota 2.2. *el principio del máximo aqui expuesto se denomina regularmente Principio del Máximo Debil, éste puede tomar una forma más general la cual se conoce como Principio del Máximo Fuerte, el cual argumenta que si el máximo ocurre en E, entonces la solución debe ser constante en cierta región, para un general tratamiento de éste pricipio riecomendo la lectura de [1] y [2]*

Referencias

[1] Protter, M y Weinberger, H. *Maximun Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations.* American Math. Society, Rhode Island, 1998.

[3] Fritz, John. *Partial Differential Equations.* Tercera Edición. Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] Greenspan, D. *Introduction to Partial Differential Equations*, Dover Publications, Inc. new York, 2000.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: millercgomez@gmail.com