Alvaro y Arsenio. 2025. Aplicación del límite en la determinación de la aceleración centrípeta en un movimiento circular uniforme. Revista Sigma, 21 (2). Páginas 1–7.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XXI № 2 (2025), páginas 1–7

Aplicación del límite en la determinación de la aceleración centrípeta en un movimiento circular uniforme

Villota Alvaro[1]
Hidalgo Arsenio[2]

Abstract: Applying limit theory as a mathematical tool, a novel and unprecedented deduction of the physical expression that calculates the centripetal acceleration of a body that describes a circular path with uniform motion is presented. *Keywords.* Centrifugal acceleration, Limits, Uniform circular motion.

Resumen: Aplicando como herramienta matemática la teoría de límites, se presenta una deducción novedosa e inédita de la expresión física que calcula la aceleración centrípeta de un cuerpo que describe una trayectoria circular con movimiento uniforme.

Palabras Clave. Aceleración centrípeta, Límites, Movimiento circular uniforme.

1. Introducción

Este trabajo inédito tiene como propósito mostrar la aplicación ingeniosa un rudimento básico y sencillo del cálculo diferencial en otros ámbitos de las ciencias diferentes a la matemática, específicamente se desarrolla la deducción de la expresión física de la aceleración centrípeta, de un cuerpo que se moviliza en una trayectoria circular con movimiento uniforme, aplicando como herramienta matemática la teoría de resolución de límites y la geometría plana. (El estudio lo aborda la cinemática en el movimiento circular uniforme).

[1]Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Correo: vvvillota1@gmail.com.

[2]2Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño. Correo: arsenio.hidalgo@gmail.com .

Las deducciones de la expresión de aceleración centrípeta son ampliamente conocidas y aparecen en los textos y publicaciones, pero requieren un conocimiento avanzado de cálculo diferencial y vectorial lo mismo que física con enfoque vectorial y superan ampliamente la simplicidad del concepto de límite y su aplicación, por lo que se tomará en cuenta únicamente la magnitud o módulo de la velocidad tangencial.

Lo desarrollos físico matemáticos publicados, son muy similares y distintos al que se presenta en el presente estudio, se mencionan los siguientes:

Bedford y Fowler (2000) [1] emplean cálculo vectorial, coordenadas polares, primera y segunda derivadas y llegan a la expresión de la aceleración centrípeta, no sin antes necesitar descomponer la aceleración del cuerpo que gira en componentes radial y tangencial.

Sears et al (2009) [2] exponen una deducción fundamentada en el cálculo vectorial y primeras y segundas derivadas. Plantean además un concepto muy elaborado de algebra vectorial aplicada a la física que consiste en que la aceleración es ortogonal a la velocidad de desplazamiento circular cuando está es constante. Deducciones similares se encuentran en Tipler (1999) [3], Alonso (1971) [4], Serway y Jewett (2008) [5] y muchísimos más. Todas ellas enmarcadas en el movimiento circular uniforme.

2. Marco conceptual

- Velocidad angular: Tasa de cambio del ángulo respecto al tiempo. Es una medida de cuán rápido está cambiando la posición angular de un objeto en movimiento circular. respecto al tiempo. Sears et al (2009) [2].
- Aceleración: Variación de velocidad con respecto al tiempo. Ortega (1986 -2006) [7].
- Movimiento circular uniforme: Es aquel desplazamiento en el que un objeto se mueve a lo largo de una trayectoria circular con una velocidad constante. Es decir, el módulo de la velocidad no cambia, pero la dirección de la velocidad está variando continuamente debido a que el objeto se mueve en una trayectoria curva. Sears et al (2009) [2].
- Aceleración centrípeta: En un movimiento circular uniforme de un cuerpo, es la aceleración radial orientada hacia el centro de la trayectoria. Landau (1972) [11].

3. Presentación del problema

Deducir la expresión de la aceleración centrípeta, que sea alternativa a las ya existentes empleando como herramienta matemática el límite.

Básicamente la deducción que se presenta en los textos tradicionales de física, los cuales están referenciados en la introducción del presente trabajo, es la siguiente:

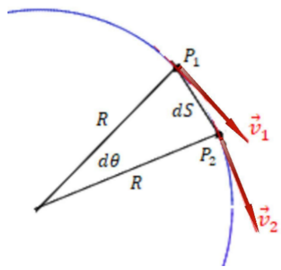

Figura 1

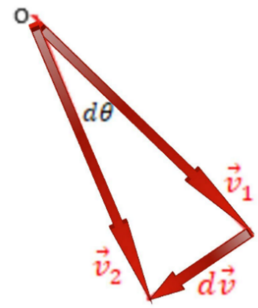

Figura 2

Figura 1. Parte izquierda vectores de velocidad tangentes en dos puntos a la trayectoria circular de radio R de un cuerpo que se desplaza con movimiento uniforme. Parte derecho, cambio vectorial de velocidad para los dos puntos referidos

El cuerpo se mueve con velocidad constante desde el punto P_1 hasta el punto P_2, durante un tiempo dt. En la parte izquierda de la figura 1, puede apreciarse los vectores de velocidad tangencial para los dos puntos considerados. Es preciso anotar que dichos vectores son en cada punto, perpendiculares a su respectivo radio. En la parte derecha de la figura puede observarse la variación vectorial de velocidad.

Siendo la velocidad tangencial constante, se puede afirmar que:

$$|\overline{v}_1| = |\overline{v}_2| = v \tag{1}$$

Además:

$$d\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1 \tag{2}$$

Los triángulos isósceles que se aprecian en las figuras 1 y 2, son semejantes porque el ángulo comprendido entre los lados iguales es $d\theta$.

De esa semejanza puede establecerse que:

$$\frac{|d\overrightarrow{v}|}{v} = \frac{dS}{R} \tag{3}$$

Despejando el módulo de la velocidad:

$$|d\overrightarrow{v}| = v\frac{dS}{R} \tag{4}$$

Dividiendo los dos miembros por dt:

$$\frac{|d\overrightarrow{v}|}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dS}{dt} \tag{5}$$

Considérese que:

$$v = \frac{dS}{dt} \tag{6}$$

Reemplazando 6 en 5:

$$\frac{|d\overrightarrow{v}|}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

Pero:

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{|d\overrightarrow{v}|}{dt} \tag{7}$$

Donde a es la aceleración.

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{8}$$

En este punto, debe realizarse la siguiente reflexión, dado que la velocidad tangencial es constante, no es posible que el vector de aceleración tenga una dirección diferente a la del radio, en cada instante. Lo anterior puesto que la aceleración centrípeta que permite cambiar la dirección de la velocidad tangencial en cada punto sin cambiar su modulo, se orienta en dirección radial con sentido dirigido al centro, en sentido opuesto al vector posicional del radio.

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{9}$$

4. Resultados

Considérese un cuerpo que describe una trayectoria circular en un plano horizontal con movimiento uniforme, el cuerpo está unido al centro de giro mediante una cuerda de masa despreciable. Véase figura 3. Considérese un lapso de tiempo muy pequeño, es decir que:

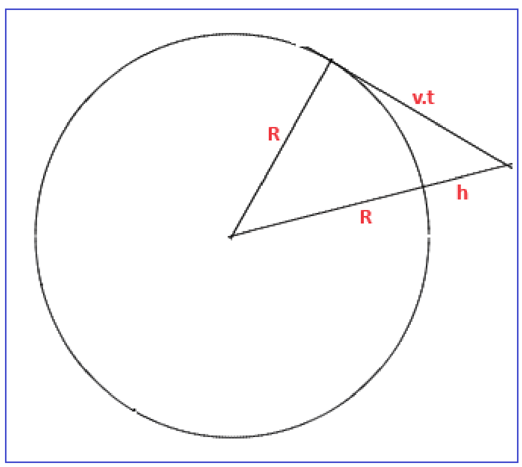

Figura 3: Trayectoria circular descrita por un cuerpo que se desplaza con movimiento uniforme. R es el radio de giro y v la velocidad tangencial.

$$t \to 0 \tag{1}$$

El cuerpo tiende a seguir movimiento recto tangente a la trayectoria circular, de longitud d.

$$d = v \cdot t \tag{2}$$

Considerando que el radio y la tangente son perpendiculares, del triángulo rectángulo de la figura 1, se puede establecer:

$$(R+h)^2 = R^2 + v^2t^2 \tag{3}$$

Despejando h:

$$R + h = \sqrt{R^2 + v^2t^2} \tag{4}$$

$$h = \sqrt{R^2 + v^2t^2} - R \tag{5}$$

Tratándose de movimiento circular uniforme, la cuerda genera una aceleración centrípeta para conservar la trayectoria circular.

La aceleración centrípeta corrige el alejamiento h en la dirección del radio, por lo tanto:

$$h = \frac{a_c t^2}{2} \tag{6}$$

Reemplazando el valor de h en 5:

$$\frac{a_c t^2}{2} = \sqrt{R^2 + v^2 t^2} - R \tag{7}$$

Despejando la aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} - R)}{t^2} \tag{8}$$

Pero esto ocurre cuando $t \to 0$, por lo tanto:

$$a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} - R)}{t^2} \tag{9}$$

$$a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} - R)(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + R)}{t^2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + R)} \tag{10}$$

$$a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2(R^2 + v^2 t^2 - R^2)}{t^2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + R)} \tag{11}$$

$$a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2v^2 t^2}{t^2(\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + R)} \tag{12}$$

$$a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2v^2}{\sqrt{R^2 + v^2 t^2} + R} \tag{13}$$

$$a_c = \frac{2v^2}{\sqrt{R^2 + v^2 (0)^2} + R} \tag{14}$$

$$a_c = \frac{2v^2}{\sqrt{R^2} + R} \tag{15}$$

$$a_c = \frac{2v^2}{R + R} \tag{16}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

La anterior es justamente la expresión de la aceleración centrípeta.

5. Conclusiones

Se presenta una deducción novedosa, original e inédita de la expresión para calcular la aceleración centrípeta en un cuerpo que describe una trayectoria circular con movimiento uniforme.

Se realiza una aplicación de los límites en la ciencia de la física clásica.

La resolución del problema se realiza con un concepto básico del cálculo, no se emplea cálculo vectorial ni derivadas.

El trabajo demuestra que, recurriendo al ingenio y buen criterio, es posible comprender y teorizar fenómenos físicos con el conocimiento de nociones elementales y sencillas que puede poseer incluso un estudiante de educación básica secundaria.

Referencias

[1] Bedford, A., & Fowler, W. (1996). Mecánica para ingeniería: dinámica. Pearson Educación.

[2] W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young y R.A. Freedman (2009) "Física Universitaria", 12ª Edición. Vol. 1 y 2. Addison-Wesley-Longman/Pearson Education.

[3] Tipler, P. (1999) Física para la ciencia y la tecnología (Editorial Reverté, S.A., Barcelona) vol. 1

[4] Alonso, M., & Finn. (1971). Física (Fondo educativo interamericano, Ed.). Vol. 1 Mecánica

[5] Serway, R., & Jewett, J. (2008). Física para ciencias e ingeniería (Cengage learning, Ed.). Séptima edición, volumen 1, México

[6] Resnick,Robert & Krane, Kenneth S. (2001). Physics). Nueva York: John Wiley & Sons

[7] Ortega, Manuel R. (1989-2006). Lecciones de Física (4 volúmenes).

[8] Marion, Jerry B. (1996). Dinámica clásica de las partículas y sistemas. Barcelona: Ed. Reverté

[9] Richard Feynman (1974). Feynman lectures on Physics Volume 2 (en inglés). Addison Wesley Longman.

[10] Kleppner, D.; Kolenkow, R. J. (1973). , McGraw-Hill, ed. An Introduction to Mechanics

[11] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. (1972). Mechanics and Electrodynamics 1. Franklin Book Company, Inc.