Córdoba y Patiño. 2025. Una introducción al espacio de Sobolev H^2. Revista Sigma, 21 (2). Páginas 8–25.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Volumen XXI № 2 (2025), páginas 8–25

Una introducción al espacio de Sobolev H^2

Ricardo Córdoba[1]
Luis F. Patiño[2]

Abstract: In this paper, we present an introduction to the Sobolev space $H^2(\Omega)$, where $\Omega = (a, b)$ is an interval in $\mathbb{R}$ that is not necessarily bounded, and we will analyze some of its fundamental properties. In addition, we will provide a characterization of the space $H^2(\mathbb{R})$ using the Fourier transform.

Keywords. Sobolev spaces, Fourier transform.

Resumen: En este trabajo presentamos una introducción al espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, donde $\Omega = (a, b)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ no necesariamente acotado, y analizaremos algunas de sus propiedades fundamentales. Además, proporcionaremos una caracterización del espacio $H^2(\mathbb{R})$ mediante la transformada de Fourier.

Palabras Clave. Espacios de Sobolev, Transformada de Fourier.

1. Introducción

En este artículo estudiaremos alunas propiedades los espacios de Sobolev, en particular, del espacio H^2. Mediante herramientas del análisis funcional, caracterizaremos el espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ vía la transformada Fourier en $\mathbb{R}$. El objetivo de este trabajo es proporcionar un material introductorio dirigido a estudiantes interesados en temáticas relacionadas con espacios funcionales y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 enunciamos algunas propiedades relacionadas con la convolución de funciones. En la Sección 3 estudiamos el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, donde $\Omega = (a, b)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ no necesariamente acotado, y en particular analizamos resultados específicos para el espacio $H^2(\mathbb{R})$. Finalmente, en la Sección 4, presentamos una caracterización del espacio $H^2(\mathbb{R})$ a través de la transformada de Fourier. Para ello, introducimos la definición de esta transformada para funciones en $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$. Incluimos algunos resultados sin demostración, ya que propósito no es profundizar en la transformada de Fourier es sí misma, sino emplearla como herramienta de trabajo.

[1]Profesor, Departamento de Matemáticas. Universidad de Nariño. Correo: rcordoba@udenar.edu.co.
[2]Universidad del Cauca. Correo: luisfpat@unicauca.edu.co.

2. Propiedades de la convolución

En esta sección estudiamos el espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, donde $\Omega = (a, b)$ es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ no necesariamente acotado; prestando especial importancia al caso $\Omega = \mathbb{R}$. Daremos su definición y algunas propiedades importantes. Entre estas propiedades destacamos la reflexividad del espacio y algunos teoremas de inclusión continua y compacta. Para la demostración de determinados resultados de esta sección usaremos algunas propiedades conocidas sobre la convolución de funciones que enunciamos en la primera sección. Asumiremos como conocida la teoría de los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$.

La siguiente proposición, que es un caso particular del Teorema de Young, garantiza la buena definición de la función convolución para una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ y una función $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Proposición 1. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$. La convolución definida por*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\ dx$$

satisface:

1. $f * g \in L^2(\mathbb{R})$, *en c.t.p.*

2. $\|f * g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Los siguientes resultados resumen algunas propiedades de la convolución.

Proposición 2. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $g, h \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x) * g(x)]h(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)[(f(-x) * h(x)]\ dx.$$

Proposición 3. *Sean $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$(f * g) \in C^2(\mathbb{R}) \quad y \quad (f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Proposición 4. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\rho_n * f \to f$ en $L^2(\mathbb{R})$ para cualquier sucesión regularizante $(\rho_n)_n$. Es decir, $(\rho_n)_n$ es cualquier sucesión de funciones tales que*

- $\rho_n \geq 0$ *en* $\mathbb{R}$,
- $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,
- $Supp(\rho_n) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})}$,
- $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Las demostraciones de las proposiciones anteriores se pueden consultar en Brézis ([2], página 66).

Observación 1. *Se puede demostrar la existencia de una sucesión regularizante. Para ellos, consideremos la función*

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si \quad |x| < 1, \\ \\ 0 & si \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

y definamos la sucesión ρ_n mediante $\rho_n = Cn\rho(nx)$ con $C = (\int_{\mathbb{R}} \rho_n)^{-1}$. Puede verificarse que ρ_n satisface las condiciones de la definición de sucesión regularizante (véase Brézis ([2], página 70).

3. Definición y propiedades del espacio H^2

En adelante $\Omega = (a, b)$ representa un intervalo en $\mathbb{R}$, no necesariamente acotado.

Definición 1. *El espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ se define como*

$$H^2(\Omega) = \Big\{ u \in L^2(\Omega) : \exists g_1, g_2 \in L^2(\Omega) \ \text{ tales que } \int_\Omega u\varphi' \, dx = -\int_\Omega g_1 \varphi \, dx, \\ \int_\Omega u\varphi'' \, dx = \int_\Omega g_2 \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}.$$

Definición 2. *(Derivadas débiles). Sea $u \in L^2(\Omega)$. Si existen $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ tales que*

$$\int_\Omega u\varphi' \, dx = -\int_\Omega g_1\varphi \, dx \ \text{ para toda } \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\int_\Omega u\varphi'' \, dx = \int_\Omega g_2\varphi \, dx \ \text{ para toda } \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

entonces diremos que g_1, g_2 son las derivadas débiles de u de orden uno y dos respectivamente y escribiremos $u' = g_1$ y $u'' = g_2$.

Observación 2. *Las derivadas débiles son únicas salvo un conjunto de medida cero.*

Para verificar ésta última afirmación, sean $g_1, g_2, h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega u\varphi' \, dx = -\int_\Omega g_1\varphi \, dx, \quad \int_\Omega u\varphi' \, dx = -\int_\Omega h_1\varphi \, dx \ \text{ para toda } \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

y

$$\int_\Omega u\varphi'' \, dx = \int_\Omega g_2\varphi \, dx, \quad \int_\Omega u\varphi'' \, dx = \int_\Omega h_2\varphi \, dx \ \text{ para toda } \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Entonces tenemos que

$$\int_\Omega g_1\varphi \, dx = \int_\Omega h_1\varphi \, dx, \quad \int_\Omega g_2\varphi \, dx = \int_\Omega h_2\varphi \, dx.$$

Es decir,

$$\int_\Omega (g_1 - h_1)\varphi \, dx = 0, \quad \int_\Omega (g_2 - h_2)\varphi \, dx = 0, \ \text{ para toda } \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto

$$g_1(x) - h_1(x) = 0, \qquad g_2(x) - h_2(x) = 0 \quad \text{ en c.t.p. } x \in \Omega.$$

En consecuencia

$$g_1 = h_1, \qquad g_2 = h_2 \quad \text{ en c.t.p. } x \in \Omega.$$

Observación 3. *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ tal que $u', u'' \in L^2(\Omega)$. Entonces:*

1. *u pertenece al espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$.*
2. *Las derivadas clásicas de u' y u'' coinciden con las derivadas débiles de u.*

Teorema 1. *El espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$, está dotado del producto interno*

$$\langle v, w\rangle_{H^2(\Omega)} = \langle v, w\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v', w'\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v'', w''\rangle_{L^2(\Omega)}, \tag{3.1}$$

donde

$$\langle v, w\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega vw\ dx. \tag{3.2}$$

Este producto interno induce la norma dada por

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \left[\langle u, u\rangle_{H^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

la cual es equivalente a la norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Usando el hecho de que la expresión (3.2) define un producto interno en $L^2(\Omega)$, es posible ver que la expresión (3.1) define un producto interno en $H^2(\Omega)$ y entonces la expresión (3.3) define una norma en $H^2(\Omega)$. También es fácil ver que la expresión

$$\|u\|_2 = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4}$$

define una norma en $H^2(\Omega)$. Demostremos entonces la equivalencia entre las normas definidas en (3.3) y (3.4). Puesto que

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Big(&\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|u\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)}\Big)\end{aligned}$$

y

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.5}$$

Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^2(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2 \\ &= \|u\|_2^2.\end{aligned}$$

Así,

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq \|u\|_2.$$

Ahora probaremos que

$$\|u\|_2 \leq 3\|u\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

En efecto, de la desigualdad de Young[3] tenemos que

$$\begin{aligned}2\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u'\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ 2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ 2\|u'\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

[3]Sean $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Así

$$
\begin{aligned}
&2\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)}\|u''\|_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\quad \leq 2\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\Big).
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^2\\
&\quad = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\quad + 2\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u''\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}\|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\quad \leq 3\Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u''\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\quad = \ 3\|u\|_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\|u\|_2 \leq 3\|u\|_{H^2(\Omega)}.
$$

□

Teorema 2. *El espacio de Sóbolev $H^2(\Omega)$, con el producto interno*

$$
\langle v, w\rangle_{H^2(\Omega)} = \int_\Omega (vw + v'w' + v''w'')\ dx
$$

y la norma correspondiente dada por

$$
\|v\|_{H^2(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|v''\|_{L^2(\Omega)}
$$

es un espacio de Hilbert.

Demostración. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $H^2(\Omega)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n' - u_m'\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n'' - u_m''\|_{L^2(\Omega)} < \epsilon \ \text{ siempre que } \ n, m \geq N.
$$

De lo anterior tenemos que $(u_n)_n$, $(u_n')_n$ y $(u_n'')_n$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Dado que $L^2(\Omega)$ es un espacio completo, existen u, g_1, $g_2 \in L^2(\Omega)$ tales que

$$
u_n \longrightarrow u, \ \ u_n' \longrightarrow g_1 \ \ y \ \ u_n'' \longrightarrow g_2 \ \text{ en } \ L^2(\Omega).
$$

Ahora, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces demostremos que se cumplen las siguientes afirmaciones

$$
\int_\Omega u_n\varphi'\ dx \longrightarrow \int_\Omega u\varphi'\ dx, \ \ \int_\Omega u_n'\varphi\ dx \longrightarrow \int_\Omega g_1\varphi\ dx, \ \ \int_\Omega u_n''\varphi\ dx \longrightarrow \int_\Omega g_2\varphi\ dx.
$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_n\varphi'\ dx - \int_\Omega u\varphi'\ dx\right| &= \left|\int_\Omega (u_n - u)\varphi'\ dx\right|\\
&\leq \int_\Omega |u_n - u||\varphi'|\ dx\\
&\leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi'\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, dado que $u_n \longrightarrow u$ en $L^2(\Omega)$,

$$\left| \int_\Omega u_n \varphi' \, dx - \int_\Omega u \varphi' \, dx \right| \longrightarrow 0.$$

Es decir, hemos probado que

$$\int_\Omega u_n \varphi' \, dx \longrightarrow \int_\Omega u \varphi' \, dx.$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega u_n' \varphi \, dx - \int_\Omega g_1 \varphi \, dx \right| &= \left| \int_\Omega (u_n - g_1) \varphi \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |u_n' - g_1| |\varphi| \, dx \\
&\leq \|u_n' - g_1\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\left| \int_\Omega u_n' \varphi \, dx - \int_\Omega g_1 \varphi \, dx \right| \longrightarrow 0.$$

De forma similar se demuestra que

$$\int_\Omega u_n'' \varphi \, dx \longrightarrow \int_\Omega g_2 \varphi \, dx.$$

Luego, como

$$\int_\Omega u_n \varphi' \, dx = -\int_\Omega u_n' \varphi \, dx, \quad \int_\Omega u_n \varphi'' \, dx = \int_\Omega u_n'' \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(dado que $u_n \in H^2(\Omega)$), obtenemos (en el límite) que

$$\int_\Omega u \varphi' \, dx = -\int_\Omega g_1 \varphi \, dx, \quad \int_\Omega u \varphi'' \, dx = \int_\Omega g_2 \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

En consecuencia $u \in H^2(\Omega)$, $u' = g_1, u'' = g_2$. Igualmente, dado que

$$\|u_n - u\|_{H^2(\Omega)} = \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n' - u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n'' - u''\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

podemos concluir que

$$u_n \longrightarrow u \;\text{ en }\; H^2(\Omega).$$

Por lo tanto, $H^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. □

Observación 4. *De la demostración del Teorema 2 se deduce el siguiente resultado: Si una sucesión $(u_n)_n$ en $H^2(\Omega)$ satisface:*

1. *$(u_n)_n$ converge a u en $L^2(\Omega)$,*

2. *$(u_n')_n$ converge a g_1 en $L^2(\Omega)$,*

3. *$(u_n'')_n$ converge a g_2 en $L^2(\Omega)$,*

entonces $u \in H^2(\Omega),$ *con* $u' = g_1, u'' = g_2.$

A continuación demostraremos que el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^2(\mathbb{R})$. Para ello, probaremos primero dos resultados auxiliares sobre propiedades de regularización por convolución y truncamiento.

Lema 1. *Sean* $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $v \in H^2(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\rho * v \in H^2(\mathbb{R}), \quad (\rho * v)' = \rho * v', \quad (\rho * v)'' = \rho * v''.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Si $v \in H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ entonces por la Proposición 1, $\rho * v \in L^2(\mathbb{R})$. Ahora, sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces por las Proposiciones 2 y 3, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\rho * v)\varphi' dx &= \int_{\mathbb{R}} v(\breve{\rho} * \varphi')dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} v(\breve{\rho} * \varphi)' dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} v'(\breve{\rho} * \varphi)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (\breve{\rho} * v')\varphi dx.
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\rho * v)\varphi'' dx &= \int_{\mathbb{R}} v(\breve{\rho} * \varphi'')dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} v(\breve{\rho} * \varphi')' dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} v'(\breve{\rho} * \varphi)' dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\breve{\rho} * v'')\varphi dx.
\end{aligned}$$

De donde se concluye que $(\rho * v) \in H^2(\mathbb{R}), (\rho * v)' = \rho * v'$ *y* $(\rho * v)'' = \rho * v''$. Supongamos ahora que $\rho \in L^1(\mathbb{R})$. Dado que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$(ver por ejemplo en Brézis [2], página 61), entonces existe una sucesión $(\rho_n)_n$ de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R})$. Pero puesto que $v \in H^2(\mathbb{R})$, entonces del análisis anterior tenemos que

$$\rho_n * v \in H^2(\mathbb{R}), \quad (\rho_n * v)' = \rho_n * v', \quad (\rho_n * v)'' = (\rho_n * v')' = \rho_n * v''.$$

Además

$$\begin{aligned}
\|\rho_n * v - \rho * v\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(\rho_n - \rho) * v\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.
\end{aligned}$$

(Lo anterior se sigue de la Proposición 1 y del hecho de que $\rho_n \to \rho$ en $L^1(\mathbb{R})$). Por lo tanto,

$$\rho_n * v \to \rho * v \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
\|\rho_n * v' - \rho * v'\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(\rho_n - \rho) * v'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.
\end{aligned}$$

De ahí que,

$$\rho_n * v' \to \rho * v' \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

De forma similar obtenemos que

$$\rho_n * v'' \to \rho * v'' \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

En consecuencia, por la Observación 4 concluimos que

$$\rho * v \in H^2(\mathbb{R}), \quad (\rho * v)' = \rho * v', \quad (\rho * v)'' = \rho * v''.$$

□

Lema 2. *(Función de truncamiento). Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ una función definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq 1, \\ 0 & si \quad |x| \geq 2, \end{cases}$$

y consideremos la sucesión de funciones $\psi_n(x) = \psi(\frac{x}{n})$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\psi_n f \to f \quad en \quad L^2(\mathbb{R}), \quad cuando \quad n \to \infty.$$

Demostración. Observemos primero que por construcción:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \leq n, \\ 0 & si \quad |x| \geq 2n. \end{cases}$$

Para demostrar la convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, emplearemos el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. En efecto, para $x \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x| < N$ de forma tal que si $n \geq N$, tenemos que

$$|\psi_n(x)f(x) - f(x)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Además

$$|\psi_n f - f|^2 = |\psi_n - 1|^2 |f|^2 \leq |f|^2,$$

donde $|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, por el Teorema de Convergencia Dominada obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_n f - f|^2 \, dx \to 0.$$

Es decir que

$$\|\psi_n f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.$$

□

Teorema 3. *El espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso $H^2(\mathbb{R})$. Es decir, si $u \in H^2(\mathbb{R})$ entonces existe una sucesión $(u_n)_n$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que*

$$u_n \to u \quad en \quad H^2(\mathbb{R}).$$

Demostración. Sean $(\rho_n)_n$ una sucesión regularizante y $(\psi_n)_n$ la sucesión definida en el lema anterior. Mostremos inicialmente que la sucesión $(u_n)_n$ dada por

$$u_n = \psi_n(\rho_n * u)$$

converge a u en $H^2(\mathbb{R})$. Para ello, verifiquemos primero que $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\psi_n(\rho_n * u) - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\psi_n[(\rho_n * u) - u] + (\psi_n u - u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\psi_n[(\rho_n * u) - u]\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|(\rho_n * u) - u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.
\end{aligned}$$

(Teniendo en cuenta en la última línea la Proposición 4, el Lema 2 y la definición de $(\psi_n)_n$). Ahora, por el Lema 1, se tiene que

$$u_n' = \psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u)' = \psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u'). \tag{3.6}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|u_n' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} =&\|\psi_n'(\rho_n * u) + \psi_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq&\|\psi_n'(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
=&\|\psi_n'(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n(\rho_n * u') - \psi_n u' + \psi_n u' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq&\frac{1}{n}\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\rho_n * u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n[(\rho_n * u') - u']\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ \|\psi_n u' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.
\end{aligned}$$

(Nuevamente usamos en la última línea la Proposición 4, el Lema 2 y la definición de $(\psi_n)_n$). Similarmente, por el Lema 1 y por la igualdad (3.6) tenemos

$$u_n'' = \psi_n''(\rho_n * u) + 2\psi_n'(\rho_n * u') + \psi_n(\rho_n * u'').$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|u_n'' - u''\|_{L^2(\mathbb{R})} =&\|\psi_n''(\rho_n * u) + 2\psi_n'(\rho_n * u') + \psi_n(\rho_n * u'') - u''\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq&\|\psi_n''(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2\|\psi'(\rho_n * u')\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_n(\rho_n * u'') - u''\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
=&\|\psi_n''(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2\|\psi_n'(\rho_n * u')\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ \|\psi_n(\rho_n * u'') - \psi_n u'' + \psi_n u'' - u''\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
\leq&\frac{1}{n^2}\|\psi''\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\rho_n * u''\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{2}{n}\|\psi'\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\rho_n * u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&+ \|\psi_n[(\rho_n * u'') - u'']\|_{L^2(\mathbb{R})} + \quad \|\psi_n u'' - u'']\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, hemos demostrado que

$$\|u_n - u\|_{H^2(\mathbb{R})} = \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_n' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_n'' - u''\|_{H^2(\mathbb{R})} \to 0.$$

$\square$

Dos resultados importantes que analizaremos a continuación establecen, por un lado, que el espacio $H^2(\mathbb{R})$ se incluye de manera continua en $L^\infty(\mathbb{R})$, y por otro, que $H^2(\Omega)$ se incluye de forma compacta en $L^\infty(\Omega)$ para cualquier conjunto abierto y acotado Ω. La demostración de estos resultados se basa en el siguiente criterio de compacidad relativa, conocido como el Teorema de Ascoli.

Teorema 4 (Teorema de Ascoli)**.** *Sean K un espacio métrico compacto y E un subconjunto acotado de $C(K)$. Supongamos además que E es uniformemente equicontinuo, es decir que*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tal que} \quad d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \quad \forall f \in E.$$

Entonces, E es relativamente compacto en $C(K)$. Es decir, cada sucesión acotada $(u_n)_n$ en E, admite una subsucesión $(u_{n_k})_k$ convergente en $C(K)$.

Teorema 5. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}). \tag{3.7}$$

Es decir, la inclusión $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ es continua. Más aún, para un subconjunto abierto y acotado Ω de $\mathbb{R}$, se verifica que la inclusión

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \tag{3.8}$$

es compacta. Es decir, para cada sucesión acotada $(u_n)_n$ en $H^2(\Omega)$ existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ convergente en $L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y $g(s) = |s|s$. Entonces, si $s \geq 0$, $g'(s) = 2s$ y si $s < 0$, $g'(s) = 2(-s)$. Luego, $g'(s) = 2|s|$. Si hacemos $w = g(v)$ obtenemos que

$$w \in C_0^2(\mathbb{R}), \quad w' = g'(v)v' = 2|v|v'.$$

Ahora, para $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$g(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} 2|v(t)|v'(t)\,dt.$$

Es decir

$$|v(x)|v(x) = \int_{-\infty}^{x} 2|v(t)|v'(t)\,dt.$$

En consecuencia, usando la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned}
|v(x)|^2 &= ||v(x)|v(x)| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{x} 2|v(t)|v'(t)\,dt \right| \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{x} |v(t)||v'(x)|\,dt \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |v(t)||v'(x)|\,dt \\
&\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|v(x)|^2 \leq 2\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De lo anterior, por la desigualdad de Young, deducimos que

$$\begin{aligned}
|v(x)|^2 &\leq 2\left(\frac{1}{2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&\leq 2\left(\frac{1}{2}\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}\|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2}\|v''\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&= \left(\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|v'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|v''\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}|v(x)| &\leq \left(\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|v'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|v''\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|v\|_{H^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Es decir

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|v\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad \forall v \in C^2_0(\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

A continuación, procedemos con el siguiente razonamiento utilizando el Teorema 3. Sea $u \in H^2(\mathbb{R})$, por densidad de $C^\infty_0(\mathbb{R})$ en $H^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $(u_n)_n$ en $C^\infty_0(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $H^2(\mathbb{R})$. Aplicando la desigualdad (3.9), obtenemos

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_n - u_m\|_{H^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad m, n \to \infty.$$

Esto demuestra que $(u_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R})$. Como $L^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio completo, existe $\bar{u}$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_n \longrightarrow \bar{u} \ \text{ en } \ L^\infty(\mathbb{R}).$$

Verifiquemos que $u = \bar{u}$. Dado que $u_n \longrightarrow u$ en $H^2(\mathbb{R})$, entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ tal que

$$|(u_{n_k})(x) - u(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{en c.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Entonces en c.t.p $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|u(x) - \bar{u}(x)| &\leq |u(x) - (u_{n_k})(x)| + |(u_{n_k})(x) - \bar{u}(x)| \\ &\leq |u(x) - (u_{n_k})(x)| + \|u_{n_k} - \bar{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\bar{u} = u \ \text{ en c.t.p. } x \in \mathbb{R}.$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{H^2(\mathbb{R})} \\ &= \|u\|_{H^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

De donde obtenemos que para $C = 1$,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}.$$

Para demostrar (3.8), sea $\mathcal{F}$ la bola unidad de $H^2(\Omega)$. Para $u \in \mathcal{F}$ tenemos que $\forall x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &= \left| \int_y^x u'(t)\, dt \right| \\ &\leq \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} |x - y|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Análogamente, para $u' \in \mathcal{F}$ obtenemos que $\forall x, y \in \Omega$

$$\begin{aligned} |u'(x) - u'(y)| &= \Big| \int_y^x u''(t)\,dt \Big| \\ &\leq \|u''\|_{L^2(\mathbb{R})} |x-y|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x-y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Ascoli podemos concluir que $\mathcal{F}$ es relativamente compacta en $C(\bar{\Omega})$. □

Como consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos los siguientes resultados.

Corolario 1. *Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}$, se tiene que la inclusión*

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

es compacta.

Demostración. Este resultado es consecuencia inmediata del hecho de que la inclusión $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es continua. □

Corolario 2. *Si $u \in H^2(\mathbb{R})$ entonces*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} u'(x) = 0. \tag{3.10}$$

Demostración. Por el Teorema 3 existe una sucesión $(u_n)_n$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $H^2(\mathbb{R})$. De la desigualdad (3.7) se deduce que

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

y de aquí obtenemos (3.10). En efecto, dado $\epsilon > 0$, se elige n suficientemente grande de forma tal que $\|u_n - u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \epsilon$, y para $|x|$ suficientemente grande obtenemos que $u_n(x) = 0$, y por lo tanto, $|u(x)| < \epsilon$; es decir que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Similarmente se prueba la otra igualdad. □

Otra propiedad que consideramos en esta sección es la conocida fórmula de integración por partes.

Teorema 6. *Sean $u, v \in H^2(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$uv \in H^2(\mathbb{R}), \quad (uv)' = u'v + uv', \quad (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''. \tag{3.11}$$

Además, se verifican las fórmulas

$$\int_{\mathbb{R}} u'v\,dt = -\int_{\mathbb{R}} uv'\,dt, \quad \int_{\mathbb{R}} u''v\,dt = \int_{\mathbb{R}} uv''\,dt. \tag{3.12}$$

Demostración. Puesto que $u, v \in H^2(\mathbb{R})$, entonces por el Teorema 3 existen sucesiones $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tales que

$$u_n \longrightarrow u, \quad v_n \longrightarrow v \quad \text{en} \quad H^2(\mathbb{R}).$$

De lo anterior se sigue que

$$u_n \longrightarrow u, \ \ u_n' \longrightarrow u', \ \ u_n'' \longrightarrow u'', \ \ v_n \longrightarrow v, \ \ v_n' \longrightarrow v', \ \ v_n'' \longrightarrow v'' \ \ \text{en} \ \ L^2(\mathbb{R}).$$

Luego

$$u_n'v_n \longrightarrow u'v, \quad u_nv_n' \longrightarrow uv', \quad u_n''v_n \longrightarrow u''v, \quad u_n'v_n' \longrightarrow u'v', \quad u_nv_n'' \longrightarrow uv'' \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Lo que implica

$$(u_nv_n) \longrightarrow (uv), \quad (u_nv_n)' \longrightarrow (uv)', \quad (u_nv_n)'' \longrightarrow (uv)'', \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Luego, por la Observación 4, $uv \in H^2(\mathbb{R})$, y además

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Finalmente, si integramos las igualdades en (3.11) obtenemos las expresiones (3.12). En efecto, la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} (uv)'(t)\,dt \; = \int_{\mathbb{R}} (u'v + uv')(t)\,dt,$$

y el Corolario 2 implican que

$$\int_{\mathbb{R}} u'(t)v(t)\;dt + \int_{\mathbb{R}} u(t)v'(t)\;dt = 0,$$

por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} u'(t)v(t)\;dt = -\int_{\mathbb{R}} u(t)v'(t)\;dt. \tag{3.13}$$

Ahora, de (3.13) tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (uv)''(t)\;dt &= \int_{\mathbb{R}} (u''v + 2u'v' + uv'')(t)\;dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (u''v - uv'')(t)\;dt.\end{aligned}$$

Luego, por el Corolario 2 obtenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} u''(t)v(t)\;dt - \int_{\mathbb{R}} u(t)v''(t)\;dt = 0.$$

En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}} u''(t)v(t)\;dt = \int_{\mathbb{R}} u(t)v''(t)\;dt.$$

□

Finalmente, en esta sección demostraremos que el espacio $H^2(\mathbb{R})$ es reflexivo. Recordemos que si X es un espacio normado, X' denota su **espacio dual**, es decir, el espacio de todos los funcionales lineales acotados definidos en X. Análogamente, el **espacio bidual** X'' se define como el dual del espacio dual, es decir, $X'' = (X')'$.

Podemos obtener un $g_x \in X''$, eligiendo un $x \in X$ fijo y definiendo

$$g_x(f) = f(x), \quad (f \in X'). \tag{3.14}$$

Con esta definición g_x es lineal. Más aún, es fácil ver el siguiente resultado.

Proposición 5. *Para cada x fijo en un espacio normado X, el funcional g_x definido por (3.14) es un funcional lineal acotado en X', de manera que $g_x \in X''$. Además se tiene que*

$$\|g_x\| = \|x\|.$$

Ahora, a cada $x \in X$ le corresponde un $g_x \in X''$. Esto define una aplicación

$$J : X \longrightarrow X'' \tag{3.15}$$

dada por

$$J(x) = g_x. \tag{3.16}$$

La aplicación J se denomina aplicación canónica de X en X''. Se puede ver que J es una función lineal, inyectiva y preserva la norma. Es decir, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 6. *La aplicación canónica J dada por (3.15) y (3.16) es un isomorfismo del espacio normado X sobre $\mathcal{R}(J)$, donde $\mathcal{R}(J)$ denota el rango de J.*

La demostraciones de las proposiciones 5 y 6 se pueden consultar en Kreyszig ([4], página 240).

Definición 3. *Un espacio normado X se dice reflexivo si*

$$\mathcal{R}(J) = X'',$$

donde $J : X \longrightarrow X''$ es la aplicación canónica dada por (3.15) y (3.16).

Teorema 7. *El espacio de Sobolev $H^2(\Omega)$ es reflexivo.*

Demostración. Sabemos que el espacio producto $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ es reflexivo ya que $L^2(\Omega)$ es reflexivo. Ahora, el operador $T : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ definido por $Tu = (u, u', u'')$ es una isometría de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ puesto que

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} &= \|(u, u', u'')\|_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\
&= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u''\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|u\|_{H^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $T(H^2(\Omega))$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. En efecto, sea $(u_n, u_n', u_n'') \longrightarrow (u, g_1, g_2)$ en $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Entonces $u_n \longrightarrow u$ en $L^2(\Omega)$, $u_n' \longrightarrow g_1$ en $L^2(\Omega)$ y $u_n'' \longrightarrow g_2$ en $L^2(\Omega)$. De donde, $u \in H^2(\Omega)$, $u' = g_1$, $u'' = g_2$ y $u_n \longrightarrow u$ en $H^2(\Omega)$. Así, usando que T es continuo,

$$T(u) = T(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = \lim_{n\to\infty} (u_n, u_n', u_n'') = (u, g_1, g_2).$$

Luego $T(H^2(\Omega))$ es reflexivo, ya que todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo (ver Teorema 5.44 en [1]). Así podemos concluir que el espacio $H^2(\Omega)$ también es reflexivo. □

4. $H^2(\mathbb{R})$ vía Transformada de Fourier

En esta sección, caracterizaremos el espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ mediante la transformada de Fourier. Como aplicación de esta caracterización, demostraremos que la inclusión $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ es continua para todo $p \geq 2$. Para ello, analizaremos primero propiedades fundamentales de la transformada de Fourier en los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$.

Definición 4. *Sea $u \in L^1(\mathbb{R})$. La transformada de Fourier de u, denotada por $\hat{u}$, es la función definida por*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} u(x)\, dx.$$

Observación 5. *Para $u \in L^1(\mathbb{R})$ podemos ver que $\widehat{u}(\xi)$ está bien definida para cada $\xi \in \mathbb{R}$. En efecto, de la definición tenemos que*

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de una fórmula de inversión para la transformada de Fourier de una función $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (ver [3], Teorema 2, Capítulo 4).

Teorema 8 (Fórmula de Inversión de Fourier)**.** *Sea $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Entonces*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \widehat{u}(\xi)\, d\xi.$$

El siguiente teorema, conocido como Teorema de Plancherel, es fundamental en la teoría del análisis de Fourier y permitirá definir la transformada de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Su demostración puede ser consultada en la referencia [3], Teorema 1, Capítulo 4.

Teorema 9 (Plancherel)**.** *Si $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ y se cumple*

$$\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

A continuación, demostraremos que es posible extender la definición de la transformada de Fourier a funciones $u \in L^2(\mathbb{R})$. Observemos primero que

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

y dado que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $(u_n)_n \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $L^2(\mathbb{R})$. En particular, $(u_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Plancherel, la sucesión de transformadas $(\widehat{u}_n)_n \subset L^2(\mathbb{R})$ es también de Cauchy, ya que para $m, n \longrightarrow \infty$ se cumple,

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{u_n - u_m}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

Dado que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio completo, la sucesión $(\widehat{u}_n)_n$ converge a un único límite en $L^2(\mathbb{R})$. Definimos entonces **la transformada de Fourier** de u como

$$\widehat{u} := \lim_{n\to\infty} \widehat{u}_n.$$

Observación 6. *Puede demostrarse fácilmente que la definición de $\widehat{u}$ no depende de la elección de la sucesión $(\widehat{u}_n)_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ que aproxima a u. En efecto, si $(\widehat{v}_n)_n$ es otra sucesión en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $v_n \to v$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{v}_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n - v_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0,$$

lo que garantiza que $\lim_{n\to\infty} \widehat{u}_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{v}_n$ *en* $L^2(\mathbb{R})$.

Para caracterizar el espacio $H^2(\mathbb{R})$, utilizaremos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 10. *Si $u \in H^2(\mathbb{R})$ entonces*

$$\widehat{(u')}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{u}(\xi), \quad \widehat{(u'')}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\widehat{u}(\xi). \tag{4.1}$$

Demostración. Si u es una función suave y de soporte compacto entonces usando integración por partes calculamos la transformada de Fourier de u' y u'' de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (\widehat{u'})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} u'(x)\, dx \\ &= 2\pi i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} u(x)\, dx \\ &= 2\pi i\xi(\widehat{u})(\xi). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\widehat{(u'')}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} u''(x)\, dx = (2\pi i\xi)^2 (\widehat{u})(\xi).$$

Ahora, si $u \in H^2(\mathbb{R})$, entonces dado que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión $(u_n)_n$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_n \longrightarrow u, \quad u_n' \longrightarrow u', \quad u_n'' \longrightarrow u'' \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Además, por el Teorema de Plancherel tenemos que

$$\widehat{u_n} \longrightarrow \widehat{u}, \quad \widehat{u_n'} \longrightarrow \widehat{u}', \quad \widehat{u_n''} \longrightarrow \widehat{u''} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).$$

Sean $g(v)$ y $h(v)$ definidas por

$$\begin{aligned} g(v)(\xi) &= 2\pi i\xi\widehat{v}(\xi), \\ h(v)(\xi) &= (2\pi i\xi)^2\widehat{v}(\xi). \end{aligned}$$

Entonces mostraremos que $\widehat{u'} = g(u)$ y $\widehat{u''} = h(u)$. En efecto,

$$\|\widehat{u'} - g(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{u'} - g(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(u_n) - g(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.2}$$

y

$$\|\widehat{u''} - h(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{u''} - h(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|h(u_n) - h(u)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.3}$$

Pero como $\widehat{u_n'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{u_n}(\xi) = g(u_n)$ y $\widehat{u_n''}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\widehat{u_n}(\xi) = h(u_n)$, entonces

$$\|\widehat{u'} - g(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{u'} - \widehat{u_n'}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u' - u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0,$$

y

$$\|\widehat{u''} - h(u_n)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{u''} - \widehat{u_n''}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u'' - u_n''\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

De otro lado, puesto que $\widehat{u_n} \longrightarrow \widehat{u}$ en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$|\widehat{u_n}(\xi)|^2 \longrightarrow |\widehat{u}(\xi)|^2, \quad |g(u_n)(\xi)|^2 \longrightarrow |g(u)(\xi)|^2, \quad |h(u_n)(\xi)|^2 \longrightarrow |h(u)(\xi)|^2 \quad \text{en c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

Entonces existen subsucesiónes (que denotaremos de la misma forma) y un par de funciones $s_1(\xi), s_2(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ tales que

$$|g(u_n)(\xi)| \leq s_1(\xi) \quad \text{y} \quad |h(u_n)(\xi)| \leq s_2(\xi).$$

Por lo tanto, usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\|g(u_n) - g(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|h(u_n) - h(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

De donde por (4.2) y (4.3), tenemos que

$$\|\widehat{u'} - g(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \quad \text{y} \quad \|\widehat{u''} - h(u)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Así,

$$\widehat{u'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{u(\xi)}, \quad \widehat{u''}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\widehat{u}(\xi) \quad \text{en c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}$$

$\square$

El siguiente resultado establece una caracterización del espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ mediante la transformada de Fourier.

Teorema 11. *Si $u \in H^2(\mathbb{R})$ entonces $(1+|\xi|^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$. Más aún, existen constantes positivas C_1, C_2 tales que*

$$C_1\|(1+|\xi|^2)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq C_2\|(1+|\xi|^2)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.4}$$

Demostración. Supongamos que $u \in H^2(\mathbb{R})$. Entonces usando el Teorema de Plancherel y las fórmulas (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}} |u'|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}} |u''|^2\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u'}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u''}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi + 4\pi^2\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi + 16\pi^4\int_{\mathbb{R}} |\xi|^4|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq 16\pi^4\int_{\mathbb{R}} \Big(1+|\xi|^2+|\xi|^4\Big)|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq 16\pi^4\int_{\mathbb{R}} \Big(1+|\xi|^2\Big)^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= 16\pi^4\|(1+|\xi|^2)\widehat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Recíprocamente tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Big(1+|\xi|^2\Big)^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi + 4\pi^2\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi + 16\pi^4\int_{\mathbb{R}} |\xi|^4|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|\,d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u'}(\xi)|^2\,d\xi + \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u''}(\xi)|^2\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2)\,dx \\
&= \|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Entonces con

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 16\pi^4$$

tenemos que

$$C_1\|(1+|\xi|^2)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq C_2\|(1+|\xi|^2)\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Es decir, tenemos que $(1+|\xi|^2)\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ y la desigualdad (4.4) se satisface. □

Para finalizar esta sección establecemos el siguiente teorema de inclusión continua.

Teorema 12. *Sea $p \geq 2$. Entonces existe una constante positiva C_p tal que*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}, \quad \textit{para toda} \quad u \in H^2(\mathbb{R}).$$

Es decir, la inclusión $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ es continua.

Demostración. Sea $u \in H^2(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Plancherel tenemos que $\|\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Entonces dado que la inclusión $H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ es continua

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |u|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |u|^{p-2}|u|^2 \, dx \\
&\leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \, dx \\
&\leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^{p-2} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}|^2 \, d\xi \\
&\leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^{p-2}\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}^p.
\end{aligned}$$

En las dos últimas líneas usamos la caracterización del espacio $H^2(\mathbb{R})$ dada por el Teorema 11.

□

Agradecimientos. R. Córdoba fue apoyado por la Universidad de Nariño (Colombia). L. Felipe Patiño es un estudiante del programa de Matemáticas de la Universidad del Cauca (Colombia) y este artículo es parte de su trabajo de grado.

Referencias

[1] B. Rynne, M. Youngson. Linear functional analysis. Springer-Verlag. (2008) 21

[2] H. Brézis. Análisis funcional. Alianza Editorial. (1984). 9, 14

[3] L. C. Evans. Partial Differential Equations. American Mathematical Society. (1998) 22

[4] E. Kreyszig. Introductory functional analysis with applications. John Wiley & Sons. Inc. (1978) 21