Delgado, Delgado y Jácome. 2025. Trisección de un segmento de recta mediante construcciones geométricas en Geogebra. Revista Sigma, 21 (2). Páginas 26–52.

**REVISTA SIGMA**

Departamento de Matemáticas y Estadística

*Universidad de Nariño*

*Volumen XXI № 2 (2025), páginas 26–52*

# Trisección de un segmento de recta mediante construcciones geométricas en Geogebra

Juliana Delgado [1]
Leonel Delgado[2]
Libardo Jácome[3]

Abstract: This article proposes the trisection of straight line segments, based on the use of geometric constructions in GeoGebra. It explores (15) procedures that enable trisection, accompanied by the respective analytical and synthetic demonstrations, achieving precise and reliable results. The study demonstrates the versatility of GeoGebra's geometric tools for addressing traditional geometric problems with a practical focus. *Keywords.* trisection of line segments, geometrical constructions, Geogebra.

Resumen: En este artículo se propone la trisección de segmentos de recta, basado en la utilización de construcciones geométricas en Geogebra. Se exploran (15) procedimientos que posibilitan la trisección, acompañada por las respectivas demostraciones en forma analítica y sintética, logrando resultados precisos y confiables. El estudio evidencia la versatilidad de las herramientas geométricas de Geogebra para abordar problemas geométricos tradicionales con un enfoque práctico.

*Palabras Clave.* trisección de segmentos de recta, construcciones geométricas, Geogebra.

## 1. Introducción

En el ámbito de la geometría, la división de segmentos rectos constituye una temática fundamental, tanto por su significancia teórica como por sus aplicaciones prácticas. El Teorema fundamental del paralelismo ha sido una herramienta comúnmente empleada para esta tarea, permitiendo dividir un segmento en partes congruentes de manera precisa. Adicionalmente, los métodos analíticos brindan una alternativa para abordar este problema, pues permiten

[1]Estudiante, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: juliana.delgado1411@gmail.com
[2]Estudiante, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: lederudenar@gmail.com
[3]Docente, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: elo@udenar.edu.co

hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento en una razón dada, ofreciendo una solución rigurosa desde una perspectiva algebraica. Sin embargo, en el contexto actual caracterizado por el auge de las tecnologías digitales, la incorporación de software especializado como Geogebra ha supuesto una revolución en la manera de abordar las problemáticas geométricas. En la presente investigación se explora las potencialidades de Geogebra como herramienta para la trisección precisa y eficiente de un segmento de recta, utilizando construcciones geométricas. En particular, este trabajo se centrará en la presentación y análisis de diversos métodos que posibilitan la trisección de un segmento en tres partes iguales. Para ello, se utiliza únicamente las herramientas geométricas provistas por el software.

**Teorema 1.** *Sea un segmento de recta delimitado por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y sea un punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en la razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ (Lehmann, 1989, p.12), las coordenadas del punto $P$ son:*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}, \quad r \neq -1$$

Este teorema es comúnmente usado cuando se trabaja con problemas geométricos en los que las figuras están definidas por sus coordenadas en un sistema de ejes cartesianos.

Para el caso de la trisección se tiene:

$$x = \frac{x_1 + \frac{1}{2}x_2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad y = \frac{y_1 + \frac{1}{2}y_2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_1 + y_2}{3}$$

Para las demostraciones de las construcciones se usarán teoremas de geometría euclidea y fórmulas de geometría analítica.

**Teorema 2.** *Teorema fundamental del paralelismo Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier secante.*

**Teorema 3.** *Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado centroide que está a dos tercios a partir del vértice.*

**Teorema 4.** *Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.*

**Teorema 5.** *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.*

**Teorema 6.** *La recta que une los puntos de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a su mitad.*

# 2. Problemas de trisección.

## 2.1. Problema 1

Trisecar un segmento usando el teorema fundamental del paralelismo.

**Solución.** *1. Se traza $\overline{AB}$.*

*2. Se traza el rayo $\overrightarrow{AC}$ que no coincida con $\overline{AB}$.*

*3. Se traza la circunferencia $c$ con centro $C$ y radio $CA$ que corta al rayo en $D$.*

*4. Se traza la circunferencia $d$ con centro $D$ y radio $DC$ que corta al rayo en $E$.*

5. *Se traza* $\overline{EB}$.

6. *Por los puntos* $D, E$ *se trazan rectas* $m, n$ *paralelas a* $\overline{EB}$ *que cortan a* $\overline{AB}$ *en los puntos* $G, F$ *que dividen al intervalo* $\overline{AB}$ *en segmentos congruentes.*

*Ver Figura 1.*

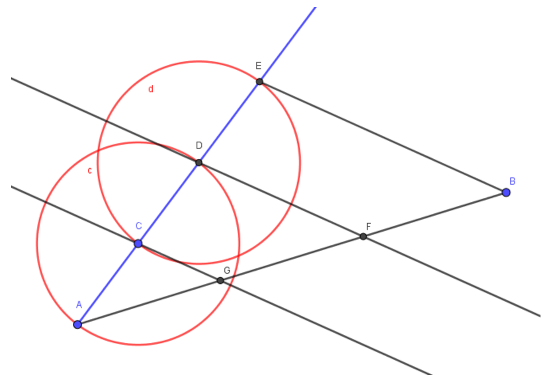


Figura 1

**Demostración analítica.** *Sean los puntos* $A = (0,0)$, $B = (p,q)$. *Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}:\ y = cx,\ q = cp$.

*Ecuación del rayo* $\overrightarrow{AC}:\ y = mx,\ m \neq c,\ C = (a,b),\ D = (2a,2b),\ E = (3a,3b),\ b = am$.

*Pendiente de* $\overleftrightarrow{EB}:\ \dfrac{3b-q}{3a-p}$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{CG}:\ y - b = \dfrac{3b-q}{3a-p}(x-a)$.

*Se resuelve el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} y = cx \\ y - b = \dfrac{3b-q}{3a-p}(x-a) \end{cases}$ *y se obtiene:*

$$G = \left(\frac{1}{3}p, \frac{1}{3}q\right).$$

**Demostración sintética.** *Por construcción se tiene en el rayo* $\overrightarrow{AC}$ *que* $AC = CD = DE$. *Las rectas paralelas* $m, n, \overleftrightarrow{EB}$ *determinan en* $\overrightarrow{AC}$ *segmentos congruentes entonces en* $\overleftrightarrow{AB}$ *determinan también segmentos congruentes* $AG = GF = FB$.

## 2.2. Problema 2

Trisecar un segmento usando el triángulo equilátero.

**Solución.** 1. *Se traza* $\overline{AB}$.

2. *Se construye el triángulo equilátero* $ABC$.

3. *Se trazan las bisectrices* $\overline{AM},\ \overline{BN}$ *que se cortan en* $G$.

4. *Se traza la circunferencia $c$ que corta a $\overline{BN}$ en $D$.*
5. *Se traza $m \perp \overline{BN}$ por $D$ que corta a $\overline{AB}$ en $E$.*
6. *$E$ es el punto trisector del segmento $\overline{AB}$.*

*Ver Figura 2.*

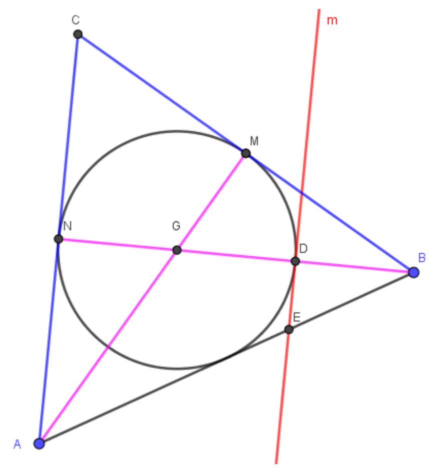


Figura 2

**Demostración analítica.** *Sean los puntos $A = (p, q)$, $B = (0, 0)$, $C = (r, s)$*

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB} : y = \dfrac{q}{p}x.$

*En un triángulo equilátero las bisectrices son medianas y alturas y por ello*

$$N = \left(\frac{r+p}{2}, \frac{s+q}{2}\right).$$

*El punto de corte $G$ de las medianas $AM$, $BN$ triseca al segmento $BN$.*

*El punto $D$ tambien triseca a $\overline{BN}$.*

*Las coordenadas del punto $G$ son* $\left(\dfrac{p+r}{3}, \dfrac{q+s}{3}\right)$.

*Las coordenadas del punto $D$ son* $\left(\dfrac{p+r}{6}, \dfrac{q+s}{6}\right)$.

*La recta $m$ tiene como ecuación*

$$y - \frac{q+s}{6} = \frac{s-q}{r-p}\left(x - \frac{p+r}{6}\right)$$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} y = \dfrac{q}{p}x \\ y - \dfrac{q+s}{6} = \dfrac{s-q}{r-p}\left(x - \dfrac{p+r}{6}\right) \end{cases}$ *se obtiene:*

$$E = \left(\frac{1}{3}p, \frac{1}{3}q\right)$$

**Demostración sintética.** *En un triángulo equilátero la bisectriz de un ángulo es mediana y por tanto Los puntos* $G,\ D$ *trisecan la mediana* $\overline{BN}$.

*En un triángulo equilátero la bisectriz de un ángulo es altura y por tanto* $\overline{BN} \perp \overline{AC}$ *y como* $m \perp \overline{BN}$ *se tiene* $m || \overline{AC}$ *y por el teorema fundamental del paralelismo* $EB = \dfrac{1}{3}AB$.

## 2.3. Problema 3

Trisecar un segmento usando trapecios.

**Solución.**

1. *Se traza* $\overline{AB}$.
2. *Se construye el triángulo equilátero* $ABC$.
3. *Los lados* $\overline{AC},\ \overline{BC}$ *se dividen en 4 partes iguales.*
4. *Se trazan los segmentos* $\overline{EI},\ \overline{DG},\ \overline{FH},\ \overline{FG}$
5. *Se trazan las diagonales del trapecio* $DGHF$, $\overline{FG},\ \overline{DH}$ *que se cortan en* $J$.
6. *Se traza la circunferencia* $c$ *que corta a* $\overline{FG}$ *en* $K$.
7. *Se traza* $m \perp \overline{FG}$ *por* $K$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $L$
8. $L$ *es el punto trisector del segmento* $\overline{AB}$.

*Ver Figura 3.*

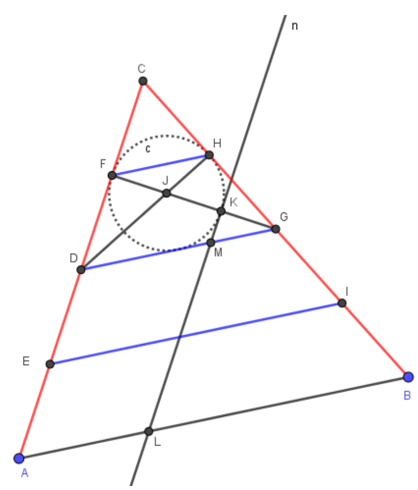


Figura 3

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:*

$$A = (0,0),\ B = (a,b),\ C = (c,d),\ D = \left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right),\ G = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right),\ M = (u,v).$$

*Teniendo en cuenta el problema anterior se tiene:*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$$
$$\left(\frac{a+c}{2} - u, \frac{b+d}{2} - v\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a+c}{2} - \frac{c}{2}, \frac{b+d}{2} - \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$
$$\frac{a+c}{2} - u = \frac{a}{6}, \quad u = \frac{2a+3c}{6}$$
$$\frac{b+d}{2} - v = \frac{b}{6}, \quad v = \frac{2b+3d}{6}$$

*Ecuación de la recta n:* $y - \frac{2b+3d}{6} = \frac{d}{c}\left(x - \frac{2a+3c}{6}\right)$

*Ecuación de la recta* $AB : y = \frac{b}{a}x$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ y - \frac{2b+3d}{6} = \frac{d}{c}\left(x - \frac{2a+3c}{6}\right) \end{cases}$ *se obtiene:*

$$L = \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b\right).$$

**Demostración sintética.** *Sea $L$ el punto de corte de $n$ con $\overline{DG}$, $\overline{GF}$ es la altura del $\triangle DGC$ y por ello $n \perp \overline{FG}$ como $\overline{FG} \perp \overline{AC}$ se tiene que $n || \overline{AC}$.*

*Ahora las rectas $\overleftrightarrow{DG}$, $\overleftrightarrow{AB}$ son paralelas lo que conduce a $AL = DM$ pero por el teorema fundamental del paralelismo $DM = \frac{2}{3}DG$ también por teorema de geometría euclídea $DG = \frac{1}{2}AB$.*

*Luego* $AL = DM = \frac{2}{3}DG = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)AB = \frac{1}{3}AB$

*El punto de corte de la recta perpendicular y el segmento $AB$ es la tercera parte del segmento $AB$, logrando así el objetivo.*

## 2.4. Problema 4

Trisecar un segmento usando recta paralela.

**Solución.**

1. *Se traza* $\overline{AB}$
2. *Se divide $\overline{AB}$ en 4 partes iguales por medio de los puntos $P$, $Q$, $R$.*
3. *Se construye el triángulo equilátero $PRC$.*
4. *Los lados $\overline{PC}$, $\overline{RC}$ se dividen en 4 partes iguales por medio de los puntos $E, D, F$ e $I, G, H$.*
5. *Se trazan los segmentos* $\overline{EI}$, $\overline{DG}$, $\overline{FH}$
6. *Se trazan los segmentos $\overline{FG}$, $\overline{DH}$ que se cortan en $J$.*

7. *Por $J$ se traza $n||\overline{PC}$ que corta a $\overline{AB}$ en $L$.*

8. $AL = \frac{1}{3}AB$

*Ver Figura 4.*

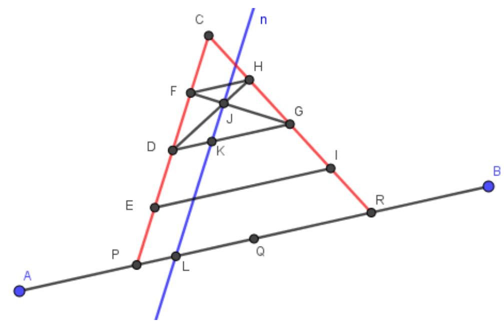


Figura 4

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:*

$$A = (0,0),\ B = (a,b),\ C = (c,d),\ P = \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right),\ R = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4}\right)$$

*Según los pasos de la construcción se tiene:*

$$D = \left(\frac{a+4c}{8}, \frac{b+4d}{8}\right),\ G = \left(\frac{3a+4c}{8}, \frac{3b+4d}{8}\right),\ K = (u,v),\ \overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$$

$$\left(u - \frac{a+4c}{8}, v - \frac{b+4d}{8}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3a+4c}{8} - \frac{a+4c}{8}, \frac{3b+4d}{8} - \frac{b+4d}{8}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2a}{8}, \frac{2b}{8}\right) = \frac{1}{12}(a,b)$$

$$u = \frac{5a+12c}{24},\ v = \frac{5b+12d}{24}$$

*Las ecuaciones de $n$ y $\overleftrightarrow{AB}$ son:*

$$y - \frac{5b+12d}{24} = \frac{b-4d}{a-4c}\left(x - \frac{5a+12c}{24}\right),\ y = \frac{b}{a}x$$

*Resolviendo la ecuación se tiene las coordenadas del punto $L$.*

$$L = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$$

**Demostración sintética.** *Sea $K$ el punto de corte de $n$ con $\overline{DG}$.*

$DK = \frac{1}{3}DG$ *pero por la construcción la figura $PLKD$ es un paralelogramo y por ello $PL = DK$.*

$$AL = AP + PL = \frac{1}{4}AB + \frac{1}{3}DG = \frac{1}{4}AB + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)PR = \frac{1}{4}AB + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)AB$$
$$= \left(\frac{1}{4}AB\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}AB$$

## 2.5. Problema 5

Trisecar un segmento usando punto medio y perpendiculares.

**Solución.** *1. Se traza $\overline{AB}$.*

*2. Por $A$ se traza $m \perp \overline{AB}$.*

*3. Con centro $A$ y radio $AB$ se traza una circunferencia $c$ que corta a $m$ en $P, Q$.*

*4. Se traza $\overline{QB}$.*

*5. Se halla el punto medio de $\overline{AB}$ denotado por $M$.*

*6. Se traza la recta $\overleftrightarrow{PM}$ que corta a $\overline{QB}$ en $N$.*

*7. Por $N$ se traza $n \perp \overline{AB}$ que corta a $\overline{AB}$ en $R$.*

*8. $RB = \dfrac{1}{3}AB$.*

*Ver Figura 5*

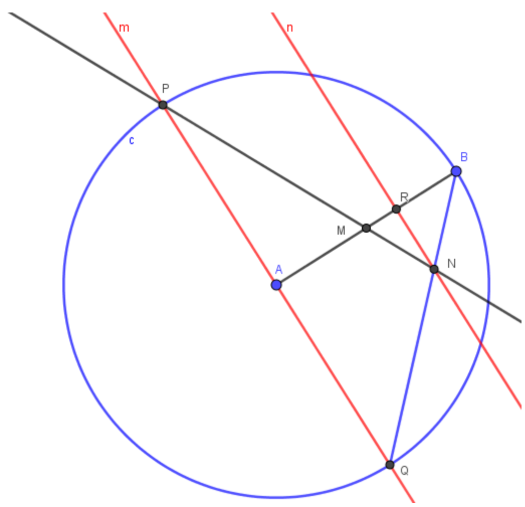


Figura 5

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0, 0),\ B = (a, b),\ M = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}:\ y = \dfrac{a}{b}$. *Ecuación de* $m:\ y = -\dfrac{a}{b}x$

*Ecuación de la circunferencia* $c:\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

*Se hallan los puntos de corte de $m$ con $c$.* $x^2 + \left(-\dfrac{a}{b}x\right)^2 = a^2 + b^2,\ b^2x^2 + a^2x^2 = b^2(a^2 + b^2),\ x^2 = b^2,\ x = \pm b,\ y = -\dfrac{a}{b}x = -\dfrac{a}{b}(\pm b) = \pm a,\ P = (-b, a),\ Q = (b, -a)$

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{BQ}:\ y + a = \dfrac{-a - b}{b - a}(x - b)$ *ecuación de* $\overleftrightarrow{PM}:\ y - \dfrac{b}{2} = \dfrac{b - 2a}{a + 2b}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$

*El punto de corte de* $\overleftrightarrow{BQ}$ *y* $\overleftrightarrow{PM}$ *es:* $N = \left(\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{2b-a}{3}\right)$.

*Ecuación de* $n:\ y - \dfrac{2b-a}{3} = -\dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{2a+b}{3}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}:\ y = \dfrac{b}{a}x$.

*Las coordenadas del punto de corte de* $n$ *y* $\overleftrightarrow{AB}$ *es* $R = \left(\dfrac{2a}{3}, \dfrac{2b}{3}\right)$.

**Demostración sintética.** *En la Figura 5 se tiene que* $\triangle BRN \sim \triangle BAQ$ *y por ello se puede escribir* $\dfrac{BR}{BA} = \dfrac{RN}{AQ}$ *de donde* $BR = RN$.

*También se tiene que* $\triangle MRN \sim \triangle MAP$ *y por ello se puede escribir* $\dfrac{MR}{MA} = \dfrac{RN}{AP}$ *de donde* $RN = \dfrac{MR}{MA}AP$, *o lo que es lo mismo* $RB = \dfrac{MR}{MA}AP = \dfrac{MR}{MB}AB = \dfrac{MR}{\frac{1}{2}AB}AB = 2MR$.

$AB = AM + MB = 2MB = 2(MR + RB) = \left(\dfrac{RB}{2} + RB\right) = 3RB$, *es decir,* $RB = \dfrac{1}{3}AB$.
*Además,* $\dfrac{BN}{BQ} = \dfrac{RB}{AB} = \dfrac{1}{3}$, *de donde* $BN = \dfrac{1}{3}BQ$.

## 2.6. Problema 6

Trisecar un segmento usando el punto medio, perpendiculares y tangente.

**Solución.**

1. *Se traza* $\overline{AB}$.
2. *Por* $A$ *se traza* $m \perp \overline{AB}$.
3. *Con centro* $A$ *y radio* $AB$ *se traza una circunferencia* $c$ *que corta a* $m$ *en* $P, Q$.
4. *Se traza* $\overline{QB}$.
5. *Se halla el punto medio de* $\overline{AB}$ *denotado por* $M$.
6. *Se traza la recta* $\overleftrightarrow{PM}$ *que corta a* $\overline{QB}$ *en* $N$.
7. *Con centro* $B$ *y radio* $BA$ *se traza una circunferencia* $d$ *que corta a* $\overline{QB}$ *en* $R$.
8. *Con centro* $R$ *y radio* $RN$ *se traza una circunferencia* $e$.
9. *Por* $N$ *se traza* $n$, *tangente a* $e$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $S$ *y a* $m$ *en* $T$.
10. $AS = \dfrac{1}{3}AB$.

*Ver Figura 6.*

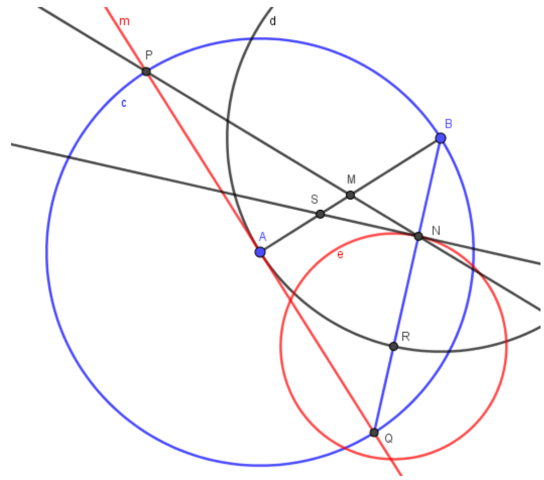


Figura 6

Según la demostración anterior $BN = \frac{1}{3}BQ = \frac{\sqrt{2}}{3}AB = SN$.

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$, $M = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}$. *Ecuación de* $m$: $y = -\frac{b}{a}x$

*Ecuación de la circunferencia* $c$: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

*Se hallan los puntos de corte del* $m$ *con* $c$:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x\right)^2 = a^2 + b^2, \quad b^2x^2 + a^2x^2 = b^2(a^2 + b^2), \quad x^2 = b^2, \quad x = \pm b$$

$$y = -\frac{a}{b}x = -\frac{a}{b}(\pm b) = \pm a, \quad P = (-b, a), \quad Q = (b, -a)$$

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{BQ}$: $y + a = \frac{-a - b}{b - a}(x - b)$

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{PM}$: $y - \frac{b}{2} = \frac{b - 2a}{a + 2b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$

*El punto de corte de* $\overleftrightarrow{BQ}$ *y* $\overleftrightarrow{PM}$ *es:* $N = \left(\frac{2a + b}{3}, \frac{2b - a}{3}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{SN}$: $y - \frac{2b - a}{3} = \frac{b - a}{b + a)}\left(x - \frac{2a + b}{3}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}x$.

*Las coordenadas del punto de corte de* $\overleftrightarrow{SN}$ *y* $\overleftrightarrow{AB}$ *es* $S = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

**Demostración sintética.** *En la figura se tiene que* $\triangle SNB \sim \triangle BAQ$ *y por ello se puede escribir* $\frac{SN}{AB} = \frac{BN}{AQ}$, *de donde* $SN = BN$.

*También* $\triangle SNB \sim \triangle SAT$ *y por ello se puede escribir* $\dfrac{SN}{SA} = \dfrac{BN}{TA}$*, de donde* $SA = TA$*.*

*También se tiene que* $\triangle SNB \sim \triangle QNT$ *y por ello se puede escribir* $\dfrac{QN}{SN} = \dfrac{TN}{BN}$*, de donde*

$$QN = TN$$

$$AB = AQ$$
$$AB + AT = (TS + SN)\sqrt{2}$$
$$AB - AT = SN\sqrt{2}$$

*Sumando se obtiene:*

$$2AB = (TS + SN)\sqrt{2} + SN\sqrt{2}$$
$$2AB = \sqrt{2}TS + 2\sqrt{2}SN$$
$$2AB = \sqrt{2}TS + 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{3}AB$$
$$2AB = \sqrt{2}TS + \frac{4}{3}AB$$
$$TS = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{3}AB$$
$$TS = \sqrt{2}AS, \quad AS = \frac{1}{\sqrt{2}}TS = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{3}AB = \frac{1}{3}AB.$$

## 2.7. Problema 7

Trisecar un segmento usando medianas.

**Solución.**

1. *Se traza* $\overline{AB}$*.*
2. *Por* $A$ *se traza una recta* $\overleftrightarrow{AC}$ *que no coincida con* $\overleftrightarrow{AB}$*.*
3. *Con centro* $A$ *y radio* $AC$ *se traza una circunferencia* $c$ *que corta a* $\overleftrightarrow{AC}$ *en* $D$*.*
4. *Se trazan los segmentos* $\overline{CB}, \overline{DB}$*.*
5. *Se halla el punto medio de* $\overline{CB}$ *que se lo denota con* $M$*.*
6. *Se traza el segmento* $\overline{DM}$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $P$*.*
7. *Se halla el punto medio de* $\overline{PB}$ *que se lo denota con* $Q$*.*
8. *los puntos* $P, Q$ *dividen al segmento en 3 partes congruentes.*

*Ver Figura 7.*

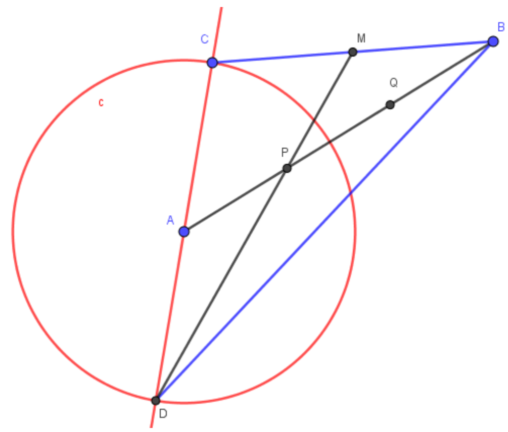


Figura 7

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0, 0)$, $B = (a, b)$, $C = (c, d)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}$. *Ecuación de* $m$: $y = -\frac{a}{b}x$.

*Ecuación de la circunferencia* $c$: $x^2 + y^2 = c^2 + d^2$.

*Se hallan los puntos de corte de* $m$ *con* $c$.

$$x^2 + \left(-\frac{d}{c}x\right)^2 = c^2 + d^2, \quad x = -c, \quad y = -d, \quad D = (-c, -d), \quad M = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

*Ecuación de la recta* $\overleftrightarrow{DM}$: $y + d = \frac{b+3d}{a+3c}(x + c)$

*El punto de corte de* $\overleftrightarrow{AB}$ *y* $\overleftrightarrow{DM}$ *es* $P$, *y sus coordenadas se obtienen como la solución del sistema de ecuaciones* $y + d = \frac{b+3d}{a+3c}(x + c), \quad y = \frac{b}{a}x$ *que es* $P = \left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

**Demostración sintética.** *La figura* $CBD$ *es un triángulo donde* $\overline{AB}$ *es una mediana y* $\overline{DM}$ *la otra mediana.*

*El corte de las medianas es* $P$ *y por el teorema de las medianas de un triángulo,* $AP = \frac{1}{3}AB$.

## 2.8. Problema 8

Trisecar un segmento usando el triángulo equilátero.

**Solución.**

1. *Se traza* $\overline{AB}$.
2. *Se construye un triángulo equilátero* $ABC$ *con lado* $\overline{AB}$.
3. *Se trazan las medianas* $\overline{CM}$, $\overline{CN}$ *que se cortan en* $O$.
4. *Se traza una circunferencia* $c$ *con centro* $O$ *y radio* $\overline{OM}$ *que corta a* $\overline{CM}$ *en* $D$.
5. *Por* $D$ *se traza* $m||\overline{AB}$ *que corta a* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BC}$ *en* $E, F$ *respectivamente.*

6. *Por $E, F$ se trazan $p \perp \overline{AB}$, $q \perp \overline{AB}$ que cortan a $\overline{AB}$ en $P, Q$ respectivamente.*

7. *Los puntos $P, Q$ dividen al segmento $\overline{AB}$ en 3 partes congruentes.*

*Ver Figura 8.*

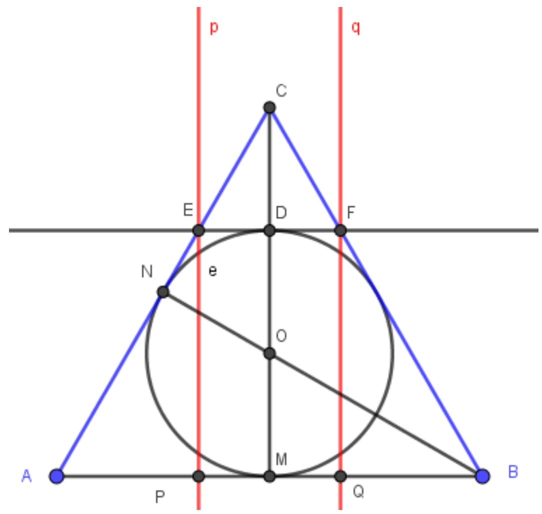


Figura 8

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, *ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = 0$, $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $D = \left(\frac{a}{2}, \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AC}$: $y = \sqrt{3}x$.

*La solución de* $y = \sqrt{3}x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ *es* $\frac{\sqrt{3}}{3}a = \sqrt{3}x$, *de donde* $a = \sqrt{3}$, *y por ello,* $P = \left(\frac{a}{3}, 0\right)$.

**Demostración sintética.** *En la figura 8 se tiene que* $\triangle AMC \sim \triangle APE$ *ya que* $\angle MAC \cong \angle DEC$ *y* $\angle ACM \cong \angle ECD$.

*De ello se concluye que* $\frac{AC}{EC} = \frac{AM}{ED}$ *pero* $\frac{AC}{EC} = 3$, *entonces* $\frac{AM}{ED} = 3$, $AM = 3ED = 3PM$, *de donde* $AM = 3AP$.

*De manera similar se demuestra que* $BM = 3QM$.

$$AB = AM + BM = 3PM + 3QM = 3(PM + QM) = 3PQ$$

*Es fácil de mostrar que* $AP = BQ$ *y de esto*

$AB = 2AP + PQ = 2AP + PQ$, $3PQ = 2AP + PQ = 2AP + PQ$,

*de donde* $PQ = AP$

*Finalmente,* $AP = BQ = QB$.

## 2.9. Problema 9

Trisecar un segmento usando puntos medios.

**Solución.** *1. Se traza el segmento* $\overline{AB}$.

*2. Se halla el punto medio de* $\overline{AB}$ *denominado* $O$.

*3. Se traza* $m \perp \overline{AB}$ *por* $O$.

*4. Se traza una circunferencia* $c$ *con centro* $O$ *y radio* $\overline{OA}$ *que corta a* $m$ *en* $D$.

*5. Se halla el punto medio de* $\overline{AB}$ *denominado* $O$.

*6. Se hallan los medios de* $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ *denominados* $C, E$ *respectivamente.*

*7. Se traza* $\overline{EC}$.

*8. Se halla el punto medio de* $\overline{EC}$ *denominado* $F$.

*9. Se traza el rayo* $\overrightarrow{DF}$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $G$.

*10.* $GB = \frac{1}{3}AB$.

*Ver Figura 9.*

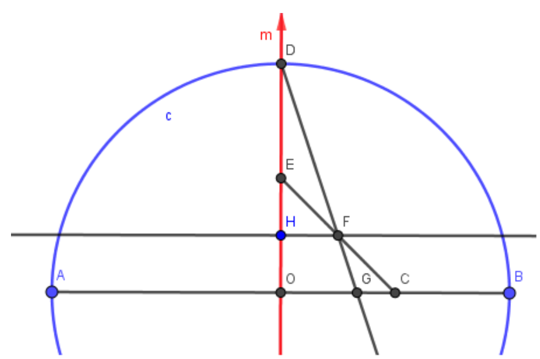


Figura 9

**Demostración analítica.** *Sea* $O = (0,0)$, $B = (r,0)$, $D = (0,r)$, $C = \left(\frac{r}{2}, 0\right)$, $E = \left(0, \frac{r}{2}\right)$, $F = \left(\frac{r}{4}, \frac{r}{4}\right)$.

*La ecuación de* $\overleftrightarrow{BF}$ *es* $y = -3x + r$.

*La ecuación de* $\overleftrightarrow{OB}$ *es* $y = 0$.

*Igualando las ecuaciones y resolviendo respecto de* $x$ *se obtiene:* $OG = x = \frac{r}{3}$

$$AB = 2OB = 2(OG + GB) = 2\left(\frac{1}{3}OB + GB\right) = \frac{2}{3}OB + 2GB = \frac{1}{3}AB + 2GB$$

*De aquí,* $GB = \frac{1}{3}AB$.

**Demostración sintética.** *Por $F$ se traza una recta perpendicular a $m$ con punto de corte $H$.*

*Se tiene que $\triangle GOD \sim \triangle FHD$ y se establece la proporción:*

$$\frac{OG}{HF} = \frac{OD}{HD}$$

$$\frac{OG}{\frac{1}{4}OB} = \frac{OB}{\frac{3}{4}OB},\ OG = \frac{1}{3}OB,\ GB = \frac{2}{3}OB = \frac{2}{3}\frac{AB}{2} = \frac{1}{3}AB.$$

## 2.10. Problema 10

Trisecar un segmento usando el cuadrado.

**Solución.**

1. *Se traza $\overline{AB}$.*
2. *Se construye el cuadrado $ABCD$ de lado $\overline{AB}$.*
3. *Se trazan las diagonales $\overline{AC}, \overline{BD}$ que se cortan en $O$.*
4. *Por $O$ se traza p$||\overline{AB}$ que corta a $\overline{AD}$ en $M$.*
5. *Se construye el punto medio de $\overline{OM}$ llamado $N$.*
6. *Se trazan las circunferencias $c, d$ con centro $O$ y radios $\overline{OM}, \overline{ON}$ que cortan a*

   $$\overline{AC}, \overline{BD}$$

   *en $Q, P$ respectivamente.*
7. *Por $P, Q$ se trazan $m \perp \overline{AC}$ y $n \perp \overline{BD}$ respectivamente que se cortan en $E$.*
8. *$FB = \frac{1}{3}AB$.*

*Ver Figura 10.*

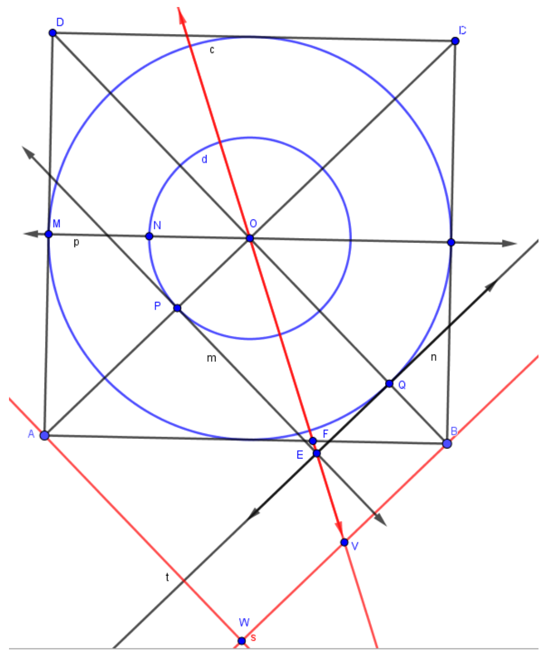


Figura 10

**Demostración analítica.** *Sean los puntos* $A = (0, 0)$, $B = (l, 0)$, $C = (l, l)$, $D = (0, l)$, $O = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, $M = \left(0, \frac{l}{2}\right)$, $N = \left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}\right)$.

*Se tienen las ecuaciones de las diagonales del cuadrado:* $y = x$, $y = l - x$.

*Se obtienen los puntos* $P = \left(\frac{l}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{8}, \frac{l}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{8}\right)$, $Q = \left(\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{4}, \frac{l}{2} - \frac{l\sqrt{2}}{4}\right)$.

*Las ecuaciones de las rectas perpendiculares a las diagonales* $m$, $n$ *en los puntos* $P$, $Q$ *son respectivamente* $y = -x + l - \frac{l\sqrt{2}}{4}$, $y = x - \frac{l\sqrt{2}}{2}$, *cuyo punto de corte es* $E = \left(\frac{l}{2} + \frac{l\sqrt{2}}{8}, \frac{l}{2} - \frac{3l\sqrt{2}}{8}\right)$.

*La recta* $q$ *tiene por ecuación* $y = -3x + 2l$. *La ecuación del eje* $x$ *es* $y = 0$.

*El punto de corte de estas ecuaciones es* $F$, *donde* $x = \frac{2}{3}l$, $y = 0$.

**Demostración sintética.** *Por* $B$ *se traza la recta* $s \perp OB$*; por* $A$ *se traza* $t \perp OA$ *que corta a* $s$ *en* $W$. $OE$ *corta a* $s$ *en* $B$.

*Se tiene que* $\triangle EQO \sim \triangle VBO$ *por tener dos ángulos congruentes y se puede establecer la proporción:*

$$\frac{OQ}{OB} = \frac{EQ}{VB},\ OQ = \frac{l}{2},\ OB = \frac{\sqrt{2}}{2}l,\ EQ = \frac{l}{4}l.$$

*Reemplazando:*

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}l} = \frac{\frac{1}{4}l}{VB},\ VB = \frac{\sqrt{2}}{4}l = \frac{1}{2}OB.$$

*$V$ es punto medio de $\overline{WB}$, $\overline{TB}$ es bisectriz de $\angle WBO$ cuya longitud es:*

$$UB = \frac{2BV \cdot BO \cos 45^\circ}{BV + BO} = \frac{2\frac{d}{4}\frac{d}{2}\cos 45^\circ}{\frac{d}{4}+\frac{d}{2}} = \frac{\frac{d^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3d}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{6}d = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}l = \frac{1}{3}l.$$

## 2.11. Problema 11

Trisecar un segmento con apoyo del triángulo equilátero.

**Solución.** *1. Se traza el segmento $\overline{AB}$.*

*2. Se divide el segmento en 4 partes iguales mediante los puntos $D, EF$.*

*3. Se construye el triángulo equilátero $AEG$.*

*4. Se traza $m \perp \overline{AB}$ por $E$.*

*5. Se traza la bisectriz $\overrightarrow{AM}$ que corta a $m$ en $H$.*

*6. Por $H$ se traza $n||\overline{EG}$ que corta a $\overline{AB}$ en $I$.*

*7. $IB = \frac{1}{3}AB$.*

*Ver Figura 11.*

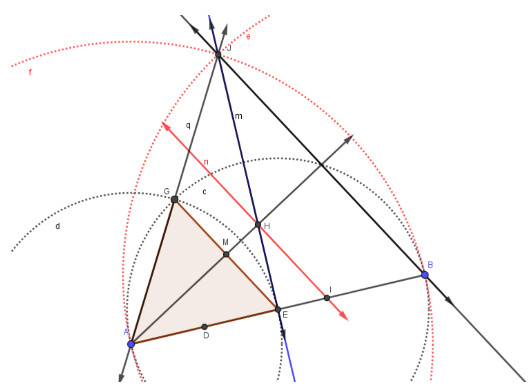

Figura 11

**Demostración analítica.** *Sean los puntos $A = (0,0), B = (a,b), E = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$*

*Ecuación de $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}x$. Ecuación de $m : y - \frac{b}{2} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$*

*Ecuación de la circunferencia $c : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$*

*Ecuación de la circunferencia $d : x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.*

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - ax - by + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + y^2,$

$-ax - by + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$

*Se hallan los puntos de corte de c con d y se obtiene:*

$$G = \left(\frac{a - \sqrt{3}b}{4}, \frac{b + \sqrt{3}a}{4}\right)$$

*El otro punto no es necesario.*

$$M = \left(\frac{\frac{a-\sqrt{3}b}{4} + \frac{a}{2}}{2}, \frac{\frac{b+\sqrt{3}a}{4} + \frac{b}{2}}{2}\right) = \left(\frac{3a - \sqrt{3}b}{8}, \frac{3b + \sqrt{3}a}{8}\right).$$

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AM}$ :

$$y = \frac{3b + \sqrt{3}a}{3a - \sqrt{3}b} x.$$

*Ecuación de la circunferencia* $e : (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2.$

*Ecuación de la circunferencia* $f : x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = x^2 + y^2,$$

$$-2ax - 2by + a^2 + b^2 = 0$$

*Se hallan los puntos de corte de e con f y se obtiene:*

$$J = \left(\frac{a - \sqrt{3}b}{2}, \frac{b + \sqrt{3}a}{2}\right)$$

*Pendiente de* $IB$ :

$$\frac{\frac{b+\sqrt{3}a}{2} - b}{\frac{a-\sqrt{3}b}{2} - a} = \frac{-b + \sqrt{3}a}{-a - \sqrt{3}b}.$$

*Ecuación de* $m$ :

$$y - \frac{b}{2} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right), \quad H = \left(\frac{3a - \sqrt{3}b}{6}, \frac{\sqrt{3}a + 3b}{6}\right).$$

*La ecuación de n:*

$$y - \frac{\sqrt{3}a + 3b}{6} = \frac{-b + \sqrt{3}a}{-a - \sqrt{3}b}\left(x - \frac{3a - \sqrt{3}b}{6}\right).$$

*La intercepción de n con* $\overleftrightarrow{AB}$ *es* $I = \left(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}b\right)$

**Demostración sintética.** *Se traza* $p || \overline{EG}$ *y la recta* $\overleftrightarrow{AG}$.

$H$ *es el punto de corte de las medianas del triángulo equilátero de base* $\overline{AB}$ *y por el teorema de las medianas,* $AI = \dfrac{2}{3}AB$ *de donde* $IB = \dfrac{1}{3}AB$

## 2.12. Problema 12

Trisecar un segmento con el hexágono regular.

**Solución.** *1. Se traza el segmento* $\overline{AB}$.

2. *Se divide* $\overline{AB}$ *en 4 partes iguales por medio de los puntos* $D, C, E$.
3. *Se traza la circunferencia* $c$ *con centro* $C$ *y radio* $CD$.
4. *Se construye el hexágono regular* $EFGDHI$ *inscrito en* $c$.
5. *Se trazan las diagonales* $\overline{HE}, \overline{IF}$ *que se cortan en* $J$.
6. *Por* $J$ *se traza* $n || \overline{IE}$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $K$.
7. $KB = \dfrac{1}{3}AB$.

*Ver Figura 12*

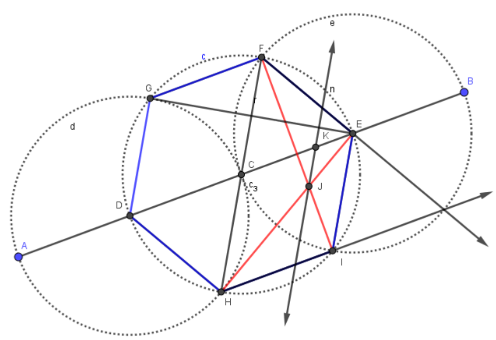


Figura 12

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0,0)$, $B = (a,b)$, $C = \left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$, $D = \left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{b}{4}\right)$, $E = \left(\dfrac{3a}{4}, \dfrac{3b}{4}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \dfrac{b}{a}x$. *Ecuación de* $m$: $y - \dfrac{b}{2} = -\dfrac{a}{b}\left(x - \dfrac{a}{2}\right)$.

*Ecuación de la circunferencia c:* $\left(x - \dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{4}\right)^2$.

*Ecuación de la circunferencia d:* $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{4}\right)^2$.

*Ecuación de la circunferencia e:* $\left(x - \dfrac{3a}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3b}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{4}\right)^2$.

*Puntos de corte de c con d:* $G = \left(\frac{3a-\sqrt{3}b}{8}, \frac{\sqrt{3}a+3b}{8}\right)$, $H = \left(\frac{3a+\sqrt{3}b}{8}, \frac{3b-\sqrt{3}a}{8}\right)$.

*Puntos de corte de c con e:* $F = \left(\frac{5a-\sqrt{3}b}{8}, \frac{\sqrt{3}a+5b}{8}\right)$, $I = \left(\frac{5a+\sqrt{3}b}{8}, \frac{5b-\sqrt{3}a}{8}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{HE}$: $y - \frac{3b}{4} = \frac{-3b-\sqrt{3}a}{-3a+\sqrt{3}b}\left(x - \frac{3a}{4}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{FI}$: $y - \frac{\sqrt{3}a+5b}{8} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{5a-\sqrt{3}b}{8}\right)$.

*Punto de corte de* $\overleftrightarrow{HE}$ *con* $\overleftrightarrow{FI}$: $J = \left(\frac{15a+\sqrt{3}b}{24}, \frac{15b-\sqrt{3}a}{24}\right)$.

*Ecuación de la recta* $n : y - \frac{15b-\sqrt{3}a}{24} = \frac{-b-\sqrt{3}a}{-a+\sqrt{3}b}\left(x - \frac{15a+\sqrt{3}b}{24}\right)$.

*Punto de corte de* $n$ *con* $\overleftrightarrow{AB} : K = \left(\frac{2a}{3}, \frac{2b}{3}\right)$.

**Demostración sintética.** *Se trazan los rayos* $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{FE}$ *que al cortarse forman un triángulo equilátero de lado* $\overline{EH}$. *De esta manera las diagonales* $\overline{EH}, \overline{IF}$ *son las medianas del triángulo mencionado y por el teorema de las medianas* $JE = \frac{1}{3}HE$ *y por el teorema fundamental del paralelismo* $KE = \frac{1}{3}CE$ *sumando* $EB$ *en ambos lados se tiene*

$KE + EB = \frac{1}{3}CE + EB = \frac{1}{3}CE + CE$, *de donde,* $KB = \frac{1}{3}(4CE) = \frac{1}{3}(AB)$.

## 2.13. Problema 13

Trisecar un segmento con ayuda del triángulo equilátero y la circunferencia circunscrita.

**Solución.**

1. *Se traza el segmento* $\overline{AB}$.
2. *Se construye el triángulo equilátero* $ABC$.
3. *Se trazan las bisectrices del triángulo que se cortan en* $D$.
4. *Se traza la circunferencia* $c$ *con centro* $D$ *y radio* $DA$ *que corta las medianas* $i, j, k$ *en los puntos* $F, G, E$.
5. *Se traza* $\overline{EF}$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $H$.
6. $HB = \frac{1}{3}AB$.

*Ver Figura 13.*

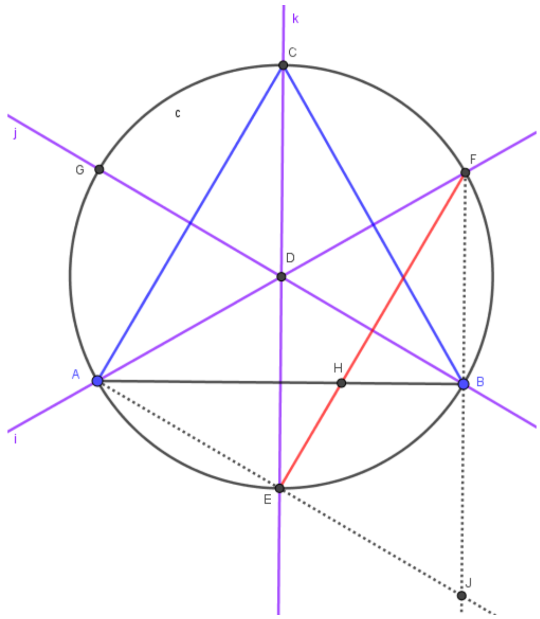


Figura 13

**Demostración analítica.** *Sean los puntos* $A = (0,0)$, $B = (a,0)$, *ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$*:* $y = 0$, $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $D = \left(\frac{0+a+\frac{a}{2}}{3}, \frac{0+0+\frac{\sqrt{3}a}{2}}{3}\right) = \left(\frac{a}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AD}$*:* $y = \sqrt{3}x$.

*Ecuación de la circunferencia c:* $\left(x - \frac{a}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2$.

*Punto de corte de* $\overleftrightarrow{AD}$ *con c:* $F = \left(\frac{a}{3}, \frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$.

*Punto de corte de c con* $\overleftrightarrow{CD}$*:* $E = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{6}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{EF}$*:* $y - \frac{\sqrt{3}a}{6} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{a}{2}\right)$.

*Punto de corte de* $\overleftrightarrow{EF}$, $y = 0$*:* $H = \left(\frac{2a}{3}, 0\right)$.

**Demostración sintética.** *Se trazan los rayos* $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FB}$ *que al interceptarse en J forman un triángulo equilátero de lado* $\overline{AF}$ *con medianas* $\overline{AB}$ *y* $\overline{EF}$ *de donde* $HB = \frac{1}{3}AB$.

## 2.14. Problema 14

Trisecar un segmento con apoyo de la circunferencia.

**Solución.** 1. *Se traza el segmento* $\overline{AB}$.

2. *Se halla el punto medio* $C$ *de* $\overline{AB}$.
3. *Se traza* $m \perp \overline{AB}$ *por* $C$.
4. *Se traza la circunferencia* $c$ *que corta a* $m$ *en* $D, E$.
5. *Se traza* $\overline{DB}$.
6. *Se halla el punto medio* $F$ *de* $\overline{BD}$.
7. *Se traza* $\overline{EF}$ *que corta a* $\overline{AB}$ *en* $G$.
8. $GB = \frac{1}{3}AB$.

*Ver Figura 14.*

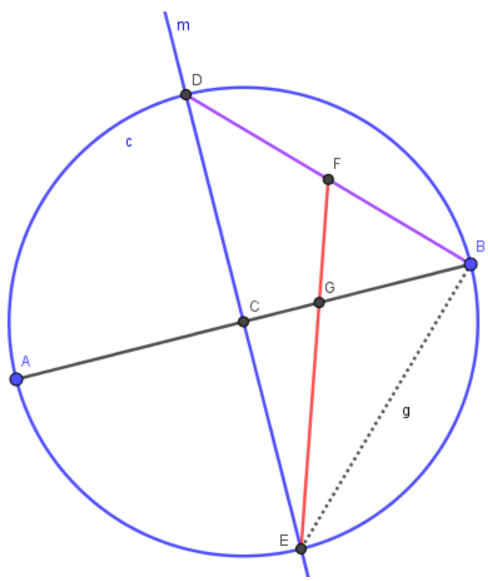


Figura 14

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0,0),\ B = (a,b),\ C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}x$. *Ecuación de* $m$: $y - \frac{b}{2} = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right)$.

*Ecuación de la circunferencia* $c$: $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

*Se hallan los puntos de corte de* $g$ *con* $c$.

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{b^2}\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \frac{(b^2 + a^2)}{b^2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}, \quad x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{b}{2}-\frac{a}{b}\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{2}-\frac{a}{b}\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{b-a}{2}.$

$x=\frac{a-b}{2},\ y=\frac{b}{2}-\frac{a}{b}\left(\frac{a-b}{2}-\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{2}-\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{b+a}{2}.$

$D=\left(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}\right),\ E=\left(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}\right)$. *Punto medio de* $\overline{DB}$: $F=\left(\frac{3a-b}{4},\frac{a+3b}{4}\right)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{EF}$: $y-\frac{b-a}{2}=\frac{3a+b}{a-3b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$.

*La solución del sistema*

$$\begin{cases} y-\frac{b-a}{2}=\frac{3a+b}{a-3b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$$

*es el punto* $G=\left(\frac{2}{3}a,\frac{2}{3}b\right)$.

**Demostración sintética.** *Se traza* $\overline{EB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ *son las medianas del triángulo* $EBD$ *por tanto* $GB=\frac{2}{3}CB$, *pero* $CB=\frac{1}{2}AB$ *entonces* $GB=\frac{2}{3}CB=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}AB\right)=\frac{1}{3}AB$.

## 2.15. Problema 15

Trisecar un segmento usando triángulos equiláteros.

**Solución.**

1. *Se traza el segmento* $\overline{AB}$.
2. *Se halla el punto medio* $C$ *de* $\overline{AB}$.
3. *Se construyen dos triángulos equiláteros* $ACD, CBE$ *que estén del mismo lado de la recta* $\overleftrightarrow{AB}$.
4. *Se construye un triángulo equilátero* $ABF$ *que esté del otro lado de la recta* $\overleftrightarrow{AB}$.
5. *Se trazan los segmentos* $\overline{DF}, \overline{EF}$ *que cortan al segmento* $\overline{AB}$ *en los puntos* $G, H$ *que trisecan al segmento* $\overline{AB}$ *en tres partes iguales.*

*Ver Figura 15.*

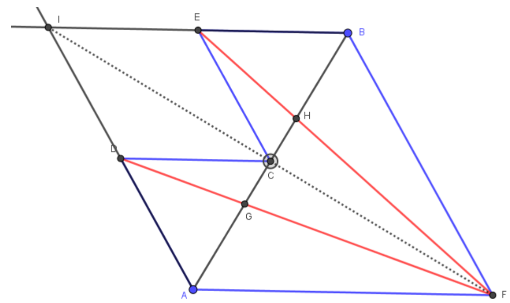


Figura 15

**Demostración analítica.** *Sean los puntos:* $A = (0,0)$, $B = (a,b)$, $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $D = (x,y)$.

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{AB}$: $y = \frac{b}{a}x$. *Debe cumplirse que* $AD = CD = AC$. *Es decir:*

$$\sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad x^2+y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

*Realizando operaciones:*

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+y^2, \quad x^2+y^2-ax-by+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+y^2,$$

$$-ax-by+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

*Se resuelve el sistema no lineal:*

$$\begin{cases} -ax-by+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0 \\ x^2+y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

*y se obtiene:*

$$D = \left(\frac{a-\sqrt{3}b}{4}, \frac{b+\sqrt{3}a}{4}\right)$$

*El otro punto no es necesario.*

*Debe cumplirse que* $BF = AF = AB$. *Es decir,*

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2, \quad x^2+y^2=a^2+b^2$$

*Realizando operaciones:*

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=x^2+y^2, \quad x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=x^2+y^2$$

$$-2ax-2by+a^2+b^2=0$$

*Se resuelve el sistema no lineal:*

$$\begin{cases} -2ax-2by+a^2+b^2=0 \\ x^2+y^2=a^2+b^2 \end{cases}$$

*y se obtiene:*

$$F=\left(\frac{a+\sqrt{3}b}{2},\frac{b-\sqrt{3}a}{2}\right)$$

*El otro punto no es necesario.*

*Ecuación de* $\overleftrightarrow{DF}$*:*

$$y-\frac{b-\sqrt{3}a}{2}=\frac{b-3\sqrt{3}a}{a+3\sqrt{3}b}\left(x-\frac{a+\sqrt{3}b}{2}\right)$$

*Resolviendo el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} y-\dfrac{b-\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{b-3\sqrt{3}a}{a+3\sqrt{3}b}\left(x-\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}\right) \\ y=\dfrac{b}{a}x \end{cases}$$

*se obtiene el punto*

$$G=\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3}\right).$$

**Demostración sintética.** *Se trazan los rayos* $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$ *que se cortan en el punto* $I$.

*Es facil ver que* $\triangle IFA\cong\triangle IFB$.

*Los segmentos* $\overline{DF},\overline{AC}$ *son las medianas del* $\triangle IFA$ *que se cortan en el punto* $H$ *y por el teorema de las medianas,* $BG=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\frac{AB}{2}=\frac{AB}{3}$.

## 3. Conclusiones

1. Buscar diferentes formas de trisección de un segmento es altamente divertido ya que se disfruta espiritualmente cuando se ha encontrado la forma de hacerlo.

2. Permite revisar teoremas y construcciones anteriores lo que implica estar revisando la teoría.

3. La búsqueda de formas para trisecar segmentos abre una puerta a la creatividad.

# Referencias

[1] Hemmerling, E. Geometría Elemental. Limusa. México.2005.

[2] Landaverde, F.(s.f.) Curso de Geometría. Librería FTD. Bogotá.

[3] Leamann Ch. Geometría Analítica. Limusa. México. 1989.

[4] Bruño G. Geometría curso superior. Bedout. Medellín. 1965.