

## REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXI N<sup>o</sup> 2 (2025), páginas 53–70

*Universidad de Nariño*

# El teorema de Varignon y algunas implicaciones del mismo

Saulo Mosquera<sup>1</sup>

Sergio Gomez<sup>2</sup>

Wilson Mutis<sup>3</sup>

**Abstract:** This article reviews a result of Euclidean geometry that is generally not considered in the mathematics curricula of Colombian elementary and secondary educational institutions. We explicitly consider different proofs of Varignon's parallelogram theorem and study some results that can be deduced by applying this theorem. For example, we characterize the conditions under which this parallelogram is a rhombus and a rectangle, as well as its perimeter and area.

**Keywords.** Varignon's theorem, quadrilateral, parallelogram, square, rectangle, geometry.

**Resumen:** Este artículo realiza una revisión de un resultado de geometría Euclidiana que, en general, no se considera en los currículos de matemáticas de las Instituciones Educativas de enseñanza básica y media Colombiana. De manera explícita consideramos diferentes demostraciones del teorema del paralelogramo de Varignon y estudiamos algunos resultados que se deducen por aplicación de este teorema. Por ejemplo, se caracterizan las condiciones bajo las cuales este paralelogramo es un rombo y un rectángulo así como su perímetro y su área.

**Palabras clave:** Teorema de Varignon, cuadrilátero, paralelogramo, cuadrado, rectángulo, geometría.

---

<sup>1</sup>MSc en Matemáticas, Universidad del Valle. Profesor pensionado, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: [samolo@udenar.edu.co](mailto:samolo@udenar.edu.co).

<sup>2</sup>Licenciado en Matemáticas, UDENAR. Magíster en Matemáticas, Universidad de Antioquia. Doctor en Estadística, Universidad de São Paulo. Correo: [sgomez1987@udenar.edu.co](mailto:sgomez1987@udenar.edu.co).

<sup>3</sup>Licenciado en Educación, especialidad Matemáticas y Física del Cauca, Magister en Matemáticas de la Universidad de Antioquia y Doctor en Ciencias de la Universidad de Sao Pablo. Profesor, Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño. Correo: [wilsonmutis@udenar.edu.co](mailto:wilsonmutis@udenar.edu.co).

## 1. Introducción

Existe un resultado de geometría euclidiana que independiente de la forma de un cuadrilátero dado caracteriza la figura determinada por los puntos medios de sus lados y que se denomina el teorema de Varignon, cuyo enunciado es el siguiente: *Si se unen de manera ordenada los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera se obtiene un paralelogramo.*

La primera demostración conocida de este resultado se encuentra en el texto *Éléments de Mathématiques de Monseieur Varignon* el cual es una compilación de los trabajos de Varignon en álgebra y geometría que fue publicado en 1731 nueve años después de su muerte.

La literatura sobre el teorema de Varignon es amplia y diversa tanto en sus aspectos teóricos, ver por ejemplo, (Oliver 2001a) o (Deswita et al. 2023), así como en su didáctica, revisar por ejemplo (Oliver 2001a) o (Distéfano y Mario 2022).

En los Estándares Básicos de Matemáticas Colombianos (Schmidt et al. 2006), se menciona lo siguiente:

*“Conjeturo y verifico propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas”.*

Para desarrollar este propósito consideramos que, al interior del aula, un análisis de un resultado como el teorema de Varignon podría ser utilizado para estudiar algunas de las propiedades de diversas clases de cuadriláteros tales como: paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados, trapecios y otros, sin embargo, salvo casos aislados, esto no se desarrolla y se deja de lado una buena posibilidad para fomentar en los jóvenes las capacidades de exploración, experimentación y visualización.

Aunque el teorema de Varignon es considerado en textos de geometría de nivel universitario, ver por ejemplo, (Coxeter y Greitzer 1967). o (Altshiller-Court 1924), el objetivo de este artículo es el de presentar, además del teorema, algunos resultados relacionados con el mismo, por ejemplo, demostraciones adicionales de este resultado, proposiciones referentes a su área y su perímetro, así como proposiciones que tratan la forma del paralelogramo en dependencia de la forma del cuadrilátero inicial.

En estas condiciones podemos describir el derrotero de este trabajo de la siguiente manera: en la sección 2, se presenta una breve biografía de Pierre Varignon, en la sección 3, se consideran cuatro demostraciones del teorema que utilizan diferentes técnicas, en particular, la prueba que Varignon desarrolló en los *Éléments de Mathématiques* y en la sección 4, se consideran algunos resultados que son consecuencia del mismo o están relacionados con la forma del cuadrilátero de partida.

El artículo finaliza con una sección de conclusiones donde se realizan algunas consideraciones de carácter teórico y metodológico, así como algunos resultados adicionales que se podrían tratar utilizando argumentos semejantes a los aquí considerados.

## 2. Pierre Varignon

De acuerdo a (Oliver 2001b) Pierre Varignon (1654-1722) fue un sacerdote jesuita francés y un destacado matemático. Se educó en la ciudad de Caen, Normandía, y gran parte de su

trabajo lo dedicó a aplicar el cálculo a problemas de mecánica y dinámica.



Figura 1: Retrato de Pierre Varignon, grabado, siglo XVIII (Wellcome Collection de Londres)

Varignon fue responsable de editar la segunda edición francesa de la *Opticks* de Newton, publicada en 1722, miembro de la Academia de Ciencias de París y uno de los científicos más destacados de su época, fue amigo de I. Newton, G. W. Leibniz y J. Bernoulli. Así mismo fue un respetado e influyente profesor de matemáticas; en 1731, nueve años después de su fallecimiento, fue publicado su trabajo en esta área con el título “*Éléments de Mathématiques de Monsieur Varignon*”, (Varignon 1731).

La figura 2 muestra una imagen de la portada del libro el cual es una introducción al álgebra y la geometría y está basado en las notas de los cursos que Varignon impartió en el Colegio Mazarin de la Universidad de París de 1688 a 1722.

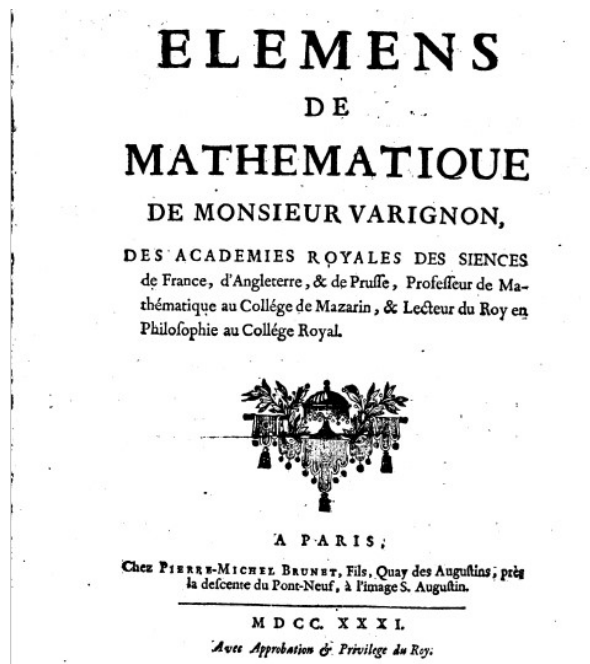


Figura 2: Una imagen de la portada del texto *Éléments de Mathématiques*.

El libro está organizado en dos partes, la primera explica conceptos de aritmética y álgebra elemental y la segunda, cubre temas de geometría euclidiana. Las dos partes del texto están numeradas por separado, 66 páginas sobre aritmética y álgebra y 155 páginas sobre geometría plana y del espacio. Para ilustrar los conceptos geométricos, el libro tiene un apéndice de veintidós tablas de figuras y en este texto encuentra la demostración del resultado que se conoce como *el teorema de Varignon*, a saber “*la figura que se forma cuando se unen en orden los puntos medios de un cuadrilátero es un paralelogramo*”.

### 3. El teorema de Varignon.

En esta sección presentamos algunas demostraciones del teorema de Varignon utilizando diferentes técnicas: geometría euclidiana, geometría vectorial, geometría analítica y finalizamos con una prueba del teorema válida en  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.1. Consideraciones iniciales.

El concepto de cuadrilátero, así como su clasificación son considerados en la enseñanza básica, sin embargo, para facilitar una lectura de este documento, iniciamos introduciendo aquellos conceptos que son necesarios en nuestro desarrollo, así como la notación y terminología necesaria.

**Definición 3.1.** Un **cuadrilátero** es la figura en el plano, determinada por cuatro puntos no colineales de tres en tres, y cuatro segmentos que unen pares consecutivos de puntos.

Los puntos se denominan **vértices** y los segmentos se llaman **lados**.

Dos lados de un cuadrilátero que tienen un vértice en común se dice que son **adyacentes**, en caso contrario se dice que son **opuestos**.

Dos vértices de un cuadrilátero que unen un lado se llaman **adyacentes**, en caso contrario se dice que son **opuestos**.

El segmento de recta que une dos vértice opuestos es una **diagonal**.

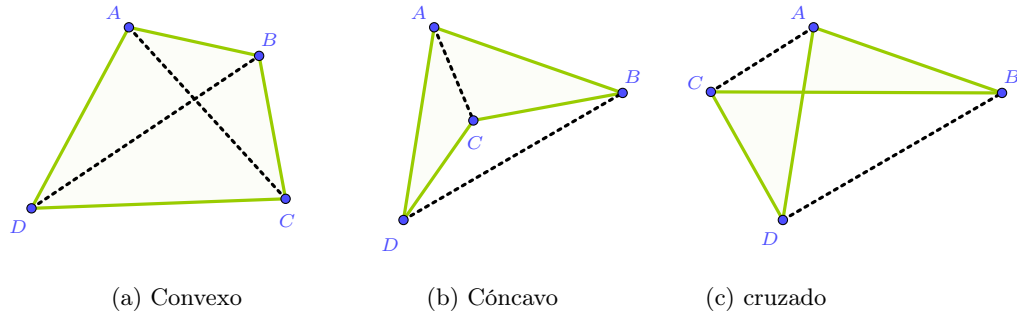


Figura 3: Los diferentes tipos de cuadrilátero.

En los cuadriláteros  $ABCD$  de la figura 3, los puntos  $A, B, C$  y  $D$  son los vértices, los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  son los lados y los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  las diagonales. Esta figura también ilustra las tres clases de cuadriláteros que existen: convexo, cóncavo y cruzado.

**Definición 3.2.** Un cuadrilátero es **convexo** si sus diagonales están en su interior. Ver figura 3a. Un cuadrilátero es **cóncavo** si una de sus diagonales está en el interior y la otra en el exterior. Ver figura 3b. Un cuadrilátero es **cruzado** si sus diagonales están en el exterior. Ver figura 3c.

**Definición 3.3.** Un **paralelogramo** es un cuadrilátero tal que sus lados opuestos son paralelos. Ver figura 4a. Un **rombo** es un paralelogramo que tiene sus lados de igual longitud. Ver figura 4b. Un **trapecio isósceles** es un cuadrilátero que posee dos lados paralelos y los lados no paralelos son de la misma longitud. Ver figura 4c.

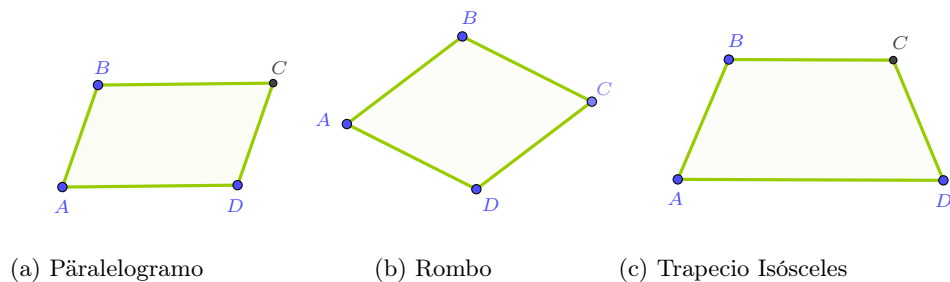


Figura 4: Algunas clases de cuadriláteros.

### 3.2. La demostración de los Éléments de Mathématiques.

En la página 62 de la segunda parte del texto (Varignon 1731) se encuentra, en francés, la demostración del resultado que actualmente se conoce como “Teorema del paralelogramo de Varignon”. Una reproducción de la prueba se muestra en la figura 5 y la demostración fundamentalmente se apoya en el resultado que hoy conocemos como el teorema de Thales (Isaacs 2009), pero que corresponde a la Proposición II del libro VI de los Elementos, (Simson et al. 1774).

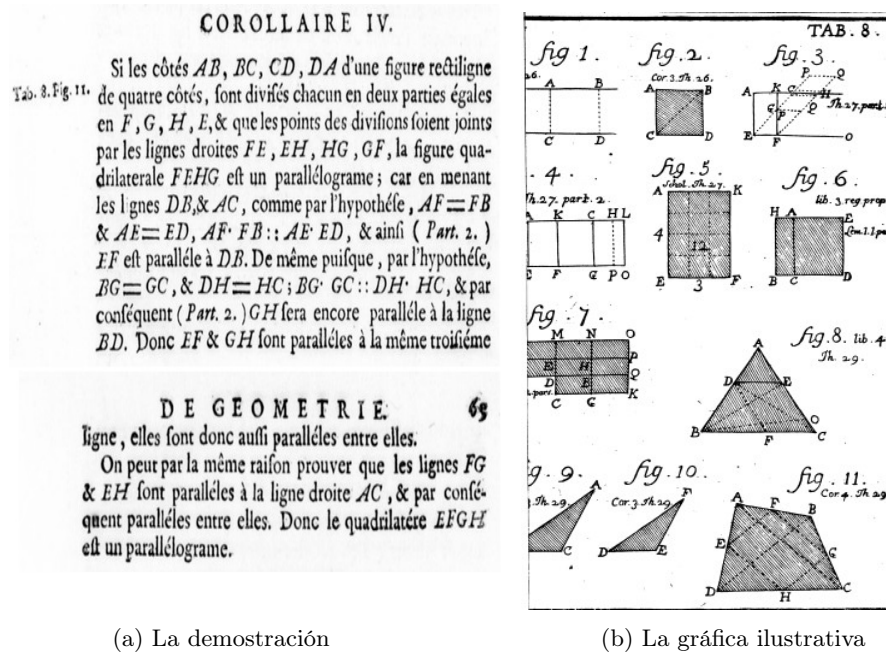


Figura 5: La demostración de Varignon para teorema del paralelogramo

Nótese que la demostración se apoya en la gráfica que se observa en la parte inferior derecha de la figura 5b que corresponde a un cuadrilátero convexo.

No conocemos si en dicha época se tenía conocimiento de los conceptos de cuadrilátero cóncavo o cruzado pero esta prueba es válida para este tipo de cuadriláteros puesto que depende básicamente del paralelismo de los segmentos  $\overline{EF}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{HG}$  así como de los segmentos  $\overline{EH}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{FG}$  y esto está justificado por aplicación de la Proposición II del libro VI de los Elementos.

### 3.3. Una versión actual de la demostración de los Éléments de Mathématiques.

En este apartado consideramos la demostración que ilustramos en la figura 5 de la sección anterior y la expresamos con la notación matemática que se utiliza en la actualidad para que podamos percibir la simpleza y elegancia del resultado considerado en los Éléments de Mathématiques.

**Proposición 3.1.** Si se unen en orden los puntos medios de los lados de un cuadrilátero

cualquiera se obtiene un paralelogramo.

*Demostración.* Sea  $ABCD$  un cuadrilátero cualquiera,  $E, F, G, H$  los puntos medios de los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  respectivamente y  $EFGH$  el cuadrilátero determinado por estos puntos medios. Demostraremos que este cuadrilátero es un paralelogramo para lo cual se debe probar que las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{HG}$  y las rectas  $\overleftrightarrow{HE}$  y  $\overleftrightarrow{GF}$  son paralelas. Veamos esto.

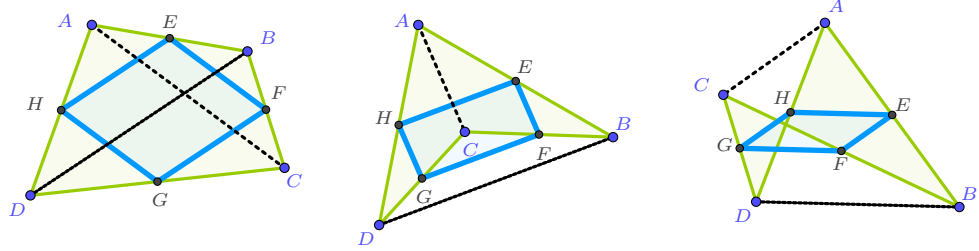


Figura 6: Una ilustración para el teorema de Varignon.

Consideremos la diagonal  $AC$  del cuadrilátero  $ABCD$ . Puesto que  $E$  y  $F$  son los puntos medios de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  entonces en el triángulo  $ABC$  se tiene que

$$\frac{AE}{EB} = 1 = \frac{CF}{FB}$$

Así que por la Proposición II del libro VI de los Elementos, (Simson et al. 1774) las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  son paralelas.

De manera semejante al considerar el triángulo  $ADC$  resulta que las rectas  $\overleftrightarrow{HG}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  son paralelas y así por la Proposición XXX del libro I de los Elementos (Simson et al. 1774) las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{HG}$  son paralelas.

Si ahora se considera la diagonal  $BD$  se demuestra análogamente que las rectas  $\overleftrightarrow{HE}$  y  $\overleftrightarrow{GF}$  son paralelas y consecuentemente el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo.  $\square$

Observe que esta prueba es válida independientemente del tipo de cuadrilátero considerado.

### 3.4. Una demostración que utiliza geometría vectorial.

Presentamos a continuación una demostración del teorema de Varignon en cuyo desarrollo se utilizan algunos elementos de geometría vectorial

**Proposición 3.2.** Sean  $ABCD$  un cuadrilátero cualquiera,  $E, F, G$  y  $H$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  respectivamente entonces el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo.

*Demostración.* Para demostrar que el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo es suficiente probar que los vectores  $\overrightarrow{EF}$  y  $\overrightarrow{HG}$  son iguales. Veamos esto.

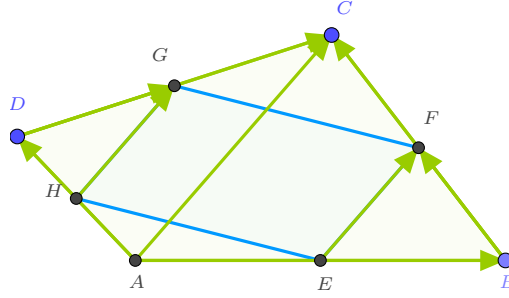


Figura 7: La gráfica para la demostración vectorial.

Puesto que  $E, F, G$  y  $H$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  respectivamente entonces  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$ ,  $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GD}$  y  $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HA}$  por tanto

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{HG}.\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo.  $\square$

### 3.5. Una demostración que utiliza geometría analítica.

En este apartado consideramos una demostración del teorema de Varignon que utiliza geometría analítica.

**Proposición 3.3.** Si se unen en orden los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera se obtiene un paralelogramo.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad podemos considerar que las coordenadas de los vértices del cuadrilátero son los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(b_1, 0)$ ,  $C(c_1, c_2)$  y  $D(d_1, d_2)$  entonces los puntos medios  $E, F, G$  y  $H$  de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  tienen como coordenadas

$$E\left(\frac{b_1}{2}, 0\right), F\left(\frac{b_1 + c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right), G\left(\frac{c_1 + d_1}{2}, \frac{c_2 + d_2}{2}\right), H\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$$



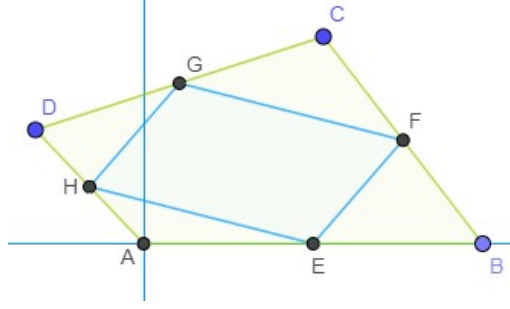


Figura 8: ilustración para la demostración por geometría analítica.

Puesto que la pendiente de la recta  $\overleftrightarrow{EF}$  es

$$m_{\overleftrightarrow{EF}} = \frac{\frac{c_2}{2}}{\frac{b_1 + c_1}{2} - \frac{b_1}{2}} = \frac{c_2}{c_1}$$

y la pendiente de la recta  $\overleftrightarrow{HG}$  es

$$m_{\overleftrightarrow{HG}} = \frac{\frac{c_2 + d_2}{2} - \frac{d_2}{2}}{\frac{c_1 + d_1}{2} - \frac{d_1}{2}} = \frac{c_2}{c_1}$$

se sigue que las pendientes de las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{HG}$  son iguales y consecuentemente estas rectas son paralelas.

Análogamente se demuestra que las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{HG}$  son paralelas y por tanto el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo.  $\square$

### 3.6. Una demostración válida en $\mathbb{R}^3$ .

En esta sección consideramos una demostración que es válida para puntos en el espacio tridimensional, sin embargo puesto que cuatro puntos en el espacio no necesariamente determinan un cuadrilátero el enunciado del teorema se expresa en términos de los puntos y no del cuadrilátero.

**Proposición 3.4.** Consideremos cuatro puntos, coplanares o no y no colineales de tres en tres, entonces los puntos medios de los segmentos que unen de manera ordenada estos cuatro puntos son coplanares y determinan un paralelogramo.

*Demostración.* Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos no colineales en grupos de tres y  $E, F, G, H$  los puntos medios de los segmentos  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  respectivamente, debemos demostrar que el objeto geométrico  $EFGH$  es un paralelogramo, para lo cual es suficiente probar que los vectores  $\overrightarrow{GF}$  y  $\overrightarrow{HE}$  son iguales. Veamos esto.

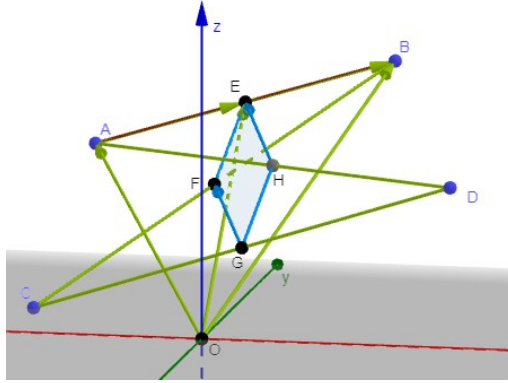


Figura 9: ilustración para la demostración en  $\mathbb{R}^3$ .

Puesto que  $\vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OE}$ ,  $\vec{OE} + \vec{EB} = \vec{OB}$  y  $\vec{AE} = \vec{EB}$  entonces  $\vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OE}$  y  $\vec{OE} + \vec{AE} = \vec{OB}$  por lo que restando estas dos últimas expresiones resulta  $\vec{OA} - \vec{OE} = \vec{OE} - \vec{OB}$ , es decir  $\vec{OE} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ .

Análogamente se obtiene que  $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$ ,  $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$  y  $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$ .

Utilizando el hecho de que  $\vec{OA} + \vec{AE} = \vec{OE}$  y dos de las igualdades anteriores podemos expresar el vector  $\vec{GF}$  como

$$\vec{GF} = \vec{OF} - \vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB} - \vec{OC} - \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OD}). \quad (a)$$

Si ahora consideramos que  $\vec{OH} + \vec{HE} = \vec{OE}$  y el otro par de igualdades, podemos expresar el vector  $\vec{HE}$  como

$$\vec{HE} = \vec{OE} - \vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OA} - \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OD}). \quad (b)$$

De a y b resulta que  $\vec{GF} = \vec{HE}$  y por tanto el objeto geométrico  $EFGH$  es un paralelogramo y consecuentemente los puntos  $E, F, G, H$  están en un mismo plano.  $\square$

Una demostración alternativa de este resultado puede desarrollarse utilizando el concepto de “producto mixto de tres vectores”, bajo la siguiente idea.

- Tres vectores no coplanares determinan un paralelepípedo cuyo volumen está dado por el producto mixto (triple producto escalar) de los mismos.
- Si este producto es nulo los tres vectores son coplanares.
- Por ello, los cuatro puntos  $E, F, G, H$  son coplanares si se demuestra que

$$\vec{HG} \cdot (\vec{GF} \times \vec{FE}) = 0$$

Esta prueba no es difícil pero requiere algunos conceptos técnicos adicionales y por tal razón no la consideramos en este documento.

## 4. Resultados relacionados con el teorema de Varignon.

En diferentes textos o artículos que tratan el teorema de Varignon se encuentran algunos resultados que se deducen a partir del mismo o que de alguna manera se relacionan con esta proposición. En esta sección consideramos diferentes resultados, algunos de los cuales se encuentran, enunciados pero no demostrados en (Oliver 2001a).

### 4.1. El perímetro del paralelogramo de Varignon

Esta proposición se refiere a la manera en que el perímetro del paralelogramo de Varignon se expresa en términos de elementos constitutivos del cuadrilátero inicial.

**Proposición 4.1.** El perímetro del paralelogramo de Varignon es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero inicial.

*Demostración.* Sean  $ABCD$  un cuadrilátero cualquiera,  $E, F, G$  y  $H$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  y  $AC, BD$  las diagonales del cuadrilátero respectivamente, ver figura 6. Puesto que  $E$  y  $H$  son los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AD$  entonces en el triángulo  $ABD$  se tiene que

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AH}{AD}$$

así que por el recíproco del teorema de Thales las rectas  $\overleftrightarrow{HE}$  y  $\overleftrightarrow{DB}$  son paralelas y por tanto los triángulos  $AEH$  y  $ABD$  son semejantes con razón de semejanza  $\frac{1}{2}$  por lo que

$$HE = \frac{1}{2}DB.$$

Análogamente

$$FG = \frac{1}{2}DB, EF = \frac{1}{2}AC, HG = \frac{1}{2}AC$$

así que

$$EF + FG + GH + HE = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}DB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}DB = AC + DB$$

□

### 4.2. El área del paralelogramo de Varignon

La siguiente proposición relaciona el área del paralelogramo de Varignon con el área del cuadrilátero dado y en su demostración utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 4.1.** Si se unen los puntos medios de un triángulo cualquiera entonces este triángulo queda diseccionado en cuatro triángulos congruentes y el área de cada uno es un cuarto del área del triángulo inicial.

*Demostración.* Considere un triángulo cualquiera  $ABC$  y sean  $D, E, F$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CA$  respectivamente, entonces como en la proposición anterior

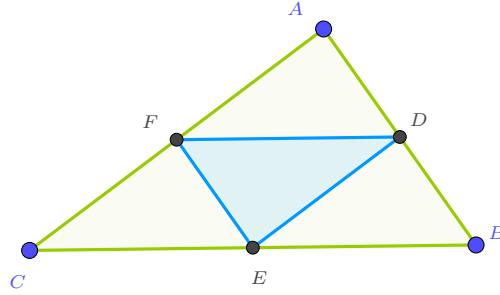


Figura 10: ilustración para la demostración del lema.

$$EF = \frac{1}{2}AB = AD = DB, FD = \frac{1}{2}CB = CE = EB, DE = \frac{1}{2}AC = AF = FC$$

así que por el teorema de congruencia de triángulos LLL, los triángulos  $FAD$ ,  $DBE$ ,  $ECF$ ,  $FDE$  son congruentes y por consiguiente el área de cada uno de ellos es la cuarta parte del triángulo dado.  $\square$

**Proposición 4.2.** El área del paralelogramo de Varignon es la mitad del área del cuadrilátero considerado.

*Demostración.* Sean  $ABCD$  un cuadrilátero como el que se ilustra en la figura 3a,  $E, F, G$  y  $H$  los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  y  $AC, BD$  las diagonales del cuadrilátero respectivamente.

Si denotamos, por ejemplo, el área del triángulo  $HAE$  como  $\mathcal{A}(HAE)$ , con notación análoga para los demás polígonos entonces por el lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(HAE) &= \frac{1}{4}\mathcal{A}(DAB), \mathcal{A}(EBF) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABC), \\ \mathcal{A}(FCG) &= \frac{1}{4}\mathcal{A}(BCD), \mathcal{A}(GDH) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(CDA)\end{aligned}$$

y utilizando estas expresiones se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(HAE) + \mathcal{A}(FCG) &= \frac{1}{4}\mathcal{A}(DAB) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(BCD) \\ &= \frac{1}{4}(\mathcal{A}(DAB) + \mathcal{A}(BCD)) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(BCDA) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABCD)\end{aligned}$$

de la misma manera

$$\mathcal{A}(AEF) + \mathcal{A}(FHD) = \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABCD)$$

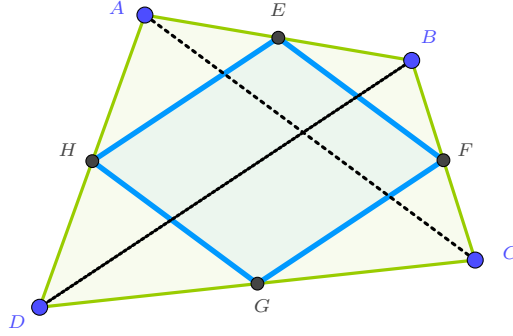


Figura 11: ilustración para el cálculo del área del paralelogramo de Varignon.

por lo que el área del paralelogramo  $EFGH$  se puede expresar como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(EFGH) &= \mathcal{A}(ABCD) - \{\mathcal{A}(HAE) + \mathcal{A}(FCG)\} + \{\mathcal{A}(EBF) + \mathcal{A}(GDH)\} \\ &= \mathcal{A}(ABCD) - \left\{ \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABCD) + \frac{1}{4}\mathcal{A}(ABCD) \right\} = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)\end{aligned}$$

□

Aunque la prueba considerada se ha realizado con el apoyo de la gráfica de un cuadrilátero convexo, no es difícil adaptar esta demostración para los otros tipos de cuadriláteros introduciendo el concepto de área orientada cuya definición puede verse por ejemplo en (Coxeter y Greitzer 1967).

### 4.3. El cuadrilátero inicial es un rombo

En este apartado consideramos la forma que adquiere el paralelogramo de Varignon cuando el cuadrilátero considerado es un rombo.

**Proposición 4.3.** Si el cuadrilátero inicial es un rombo entonces

- El paralelogramo de Varignon es un rectángulo.
- La suma de las longitudes de los cuadrados de los lados opuestos del cuadrilátero son iguales.

*Demostración.*

- Consideremos un rombo  $ABCD$ , es decir un paralelogramo cuyos lados tienen igual longitud.

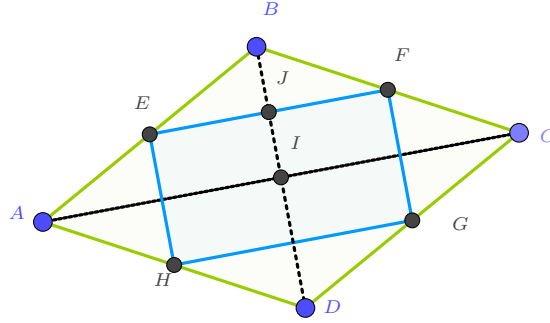


Figura 12: El paralelogramo de Varignon es un rectángulo.

Debemos demostrar que el paralelogramo  $EFGH$  es un rectángulo, es decir, que los ángulos  $FEH$  y  $EFG$  son rectos. Veamos esto.

Si el cuadrilátero  $ABCD$  es un rombo entonces  $AB = BC = CD = DA$  y como un rombo es un paralelogramo entonces  $I$  es el punto medio de las diagonales  $AC$  y  $BD$  por lo que el teorema de congruencia de triángulos LLL, nos permite concluir que los triángulos  $AIB$ ,  $BIC$ ,  $CID$  y  $DIA$  son congruentes y rectángulos en  $I$ .

Puesto que  $E$  y  $F$  son los puntos medios de  $AB$  y  $BC$  el teorema de Thales implica que las rectas  $\overleftrightarrow{EF}$  y  $\overleftrightarrow{AC}$  son paralelas y como la recta  $\overleftrightarrow{BD}$  es una transversal a estas rectas entonces por alternos internos  $\angle(AIB) = \angle(BJF) = 90^\circ$ .

Nuevamente el teorema de Thales nos asegura que las rectas  $\overleftrightarrow{FG}$  y  $\overleftrightarrow{EH}$  son paralelas y como la recta  $\overleftrightarrow{BD}$  es una transversal a estas rectas entonces por alternos internos  $\angle(FJB) = \angle(FEH) = 90^\circ$  y puesto que  $\angle(FEH) + \angle(EFG) = 180^\circ$ , por ser colaterales internos entre paralelas se sigue que  $\angle(EFG) = 90^\circ$  y por consiguiente el paralelogramo  $EFGH$  es un rectángulo.

b. Por lo demostrado en la parte a.  $AI = IC$  y  $BI = ID$ , así que por el teorema de Pitágoras

$$(AB)^2 = (AI)^2 + (IB)^2 = (IC)^2 + (IB)^2 = (BC)^2$$

y

$$(CD)^2 = (IC)^2 + (ID)^2 = (AI)^2 + (IB)^2 = (AD)^2$$

por lo que sumando miembro a miembro estas igualdades resulta que

$$(AB)^2 + (CD)^2 = (BC)^2 + (AD)^2.$$

□

#### 4.4. El cuadrilátero inicial es un trapecio isósceles

En esta sección analizamos la forma que adquiere el paralelogramo de Varignon cuando el cuadrilátero inicial es un trapecio isósceles.

**Proposición 4.4.** Si el cuadrilátero considerado es un trapecio isósceles entonces el paralelogramo de Varignon es un rombo.

*Demostración.* Consideremos un trapecio isósceles  $ABCD$ , es decir en el cuadrilátero  $ABCD$  se tiene que los segmentos  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$  son paralelos y  $AB = DC$ .

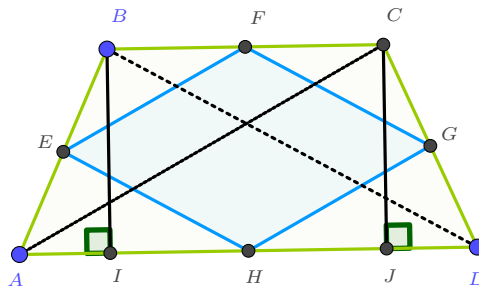


Figura 13: El paralelogramo de Varignon es un rombo.

Si  $E, F, G$  y  $H$  son los puntos medios de los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  del trapecio isósceles entonces por el teorema de Varignon el cuadrilátero  $EFGH$  es un paralelogramo por lo que únicamente debemos demostrar que  $EF = FG$ . Veamos esto.

Tracemos por  $B$  y  $C$  perpendiculares a la base  $AD$  en los puntos  $I$  y  $J$  entonces los triángulos rectángulos  $AIB$  y  $DJC$  son congruentes ya que  $AB = DC$  por ser los lados no paralelos de un trapecio isósceles y  $BI = CJ$  por ser segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas, así que los ángulos  $IAB$  y  $JDC$  son congruentes.

Como

$$\angle(IAB) + \angle(ABC) = 180^\circ = \angle(JDC) + \angle(DCB)$$

la conclusión anterior implica que  $\angle(ABC) \cong \angle(DCB)$  y puesto que  $AB = DC$  y  $BC$  es un lado común se sigue que los triángulos  $ABC$  y  $DCB$  son congruentes por lo que  $AC = DB$ . Puesto que  $E$  y  $F$  son los puntos medios de  $AB$  y  $BC$  entonces

$$\frac{EB}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{FB}{BC}$$

así que por el recíproco del teorema de Tales los segmentos  $EF$  y  $AC$  son paralelos y por tanto los triángulos  $EBF$  y  $ABC$  son semejantes con razón de semejanza  $\frac{1}{2}$  por lo que  $EF = \frac{1}{2}AC$ . De manera análoga  $FG = \frac{1}{2}BD$  y como  $AC = DB$  se concluye que  $EF = FG$  por lo que el paralelogramo  $EFGH$  es un rombo.  $\square$

#### 4.5. El área del cuadrilátero determinado por los puntos sobre los lados ubicados a una tercera parte de los vértices del cuadrilátero inicial.

Tomando como base lo desarrollado para el paralelogramo de Varignon se podría intentar estudiar el siguiente problema: ¿qué sucede si en lugar de considerar los puntos medios de los lados del cuadrilátero se consideran los puntos que dividen a los lados del cuadrilátero en la razón  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  o de forma general en la razón  $\frac{1}{k}$ ?

La respuesta que se obtiene es que el cuadrilátero determinado por estos puntos no tiene ninguna característica especial y que no existe ninguna relación entre el perímetro de este

cuadrilátero y la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero de partida, pero por sorprendente que parezca, existe una relación entre sus áreas.

Esto fue considerado de manera general por (Deswita et al. 2023) y en esta sección ilustramos este resultado para el caso en que los lados del cuadrilátero se dividen en tres partes de igual longitud.

La demostración utiliza un argumento semejante al empleado en la prueba de la proposición 3.4 y requiere la aplicación del siguiente lema.

**Lema 4.2.** El área del triángulo determinado por los puntos que dividen a los lados del triángulo en tres segmentos de igual longitud es la tercera parte del área del triángulo original.

*Demostración.* Considere un triángulo cualquiera  $ABC$  y sean  $D, E, F$  los puntos que, a partir de los vértices  $A, B$  y  $C$  dividen a los lados  $AB, BC, CA$  en tres segmentos de igual longitud respectivamente.

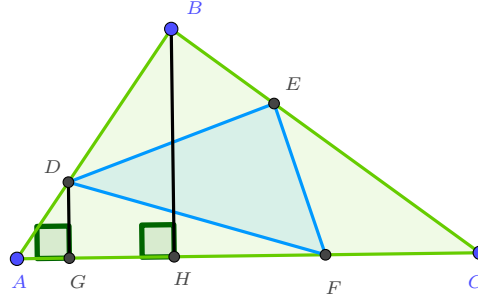


Figura 14: El triángulo de las terceras partes

Sean  $DG$  y  $BH$  las alturas de los triángulos  $ADF$  y  $ABC$  trazadas desde  $D$  y  $B$  respectivamente entonces las rectas  $\overleftrightarrow{DG}$  y  $\overleftrightarrow{BH}$  son paralelas y por tanto los triángulos considerados son semejantes y puesto que  $D$  divide a  $AB$  en la razón  $\frac{1}{3}$  entonces

$$\frac{DG}{BH} = \frac{1}{3}.$$

Como  $F$  divide a  $AC$  en la razón  $\frac{1}{3}$  entonces

$$\frac{AF}{AC} = \frac{2}{3}$$

por lo que el área del triángulo  $ADF$  se puede expresar como

$$\mathcal{A}(ADF) = \frac{1}{2} AF \cdot DG = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} AC \right) \cdot \left( \frac{1}{3} BH \right) = \frac{2}{9} \left( \frac{1}{2} AC \right) \cdot BH = \frac{2}{9} \mathcal{A}(ABC).$$

Análogamente,

$$\mathcal{A}(BDE) = \frac{2}{9} \mathcal{A}(ABC), \mathcal{A}(CEF) = \frac{2}{9} \mathcal{A}(ABC)$$

por lo que

$$\mathcal{A}(DEF) = \frac{1}{3} \mathcal{A}(ABC)$$

□



Con este resultado estamos preparados para hallar la relación entre el cuadrilátero de las tres partes y el cuadrilátero inicial.

**Proposición 4.5.** Si en un cuadrilátero cualquiera se consideran los puntos que dividen los lados del cuadrilátero en tres partes de igual longitud entonces el área del cuadrilátero determinado por estos puntos es cinco novenos del área del cuadrilátero inicial.

*Demostración.* consideremos un cuadrilátero cualquiera  $ABCD$  y sean  $E, F, G$  y  $H$  los puntos que dividen a los lados  $AB, BC, CD$  y  $DA$  y  $AC, BD$  en la razón  $\frac{1}{3}$  desde los vértices  $A, B, C$  y  $D$  respectivamente.

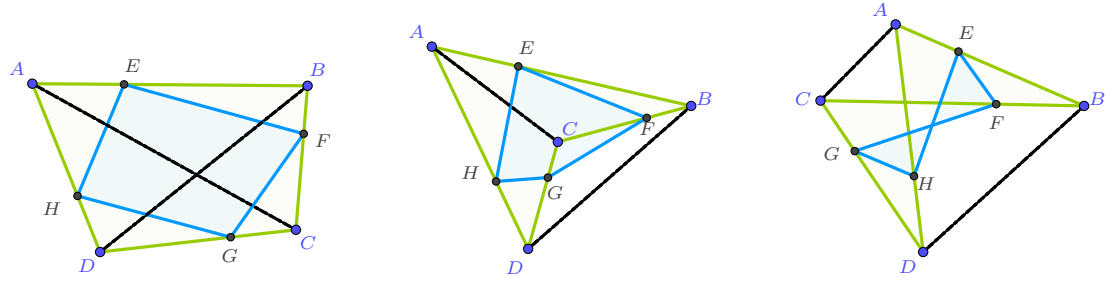


Figura 15: Los cuadriláteros de las terceras partes.

Por el lema anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(AEH) &= \frac{2}{9}\mathcal{A}(ABD), \mathcal{A}(BFE) = \frac{2}{9}\mathcal{A}(BCD), \\ \mathcal{A}(CGF) &= \frac{2}{9}\mathcal{A}(BCD), \mathcal{A}(DHG) = \frac{2}{9}\mathcal{A}(DAC)\end{aligned}$$

por tanto

$$\mathcal{A}(AEH) + \mathcal{A}(CGF) = \frac{2}{9}\mathcal{A}(ABD) + \frac{2}{9}\mathcal{A}(BCD) = \frac{2}{9}\{\mathcal{A}(ABD) + \mathcal{A}(BCD)\} = \frac{2}{9}\mathcal{A}(ABCD)$$

De la misma manera

$$\mathcal{A}(BFE) + \mathcal{A}(DHG) = \frac{2}{9}\mathcal{A}(ABCD)$$

así que el área del cuadrilátero  $EFGH$  se puede expresar como

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(EFGH) &= \mathcal{A}(ABCD) - [\mathcal{A}(HAE) + \mathcal{A}(FCG)] + (\mathcal{A}(EBF) + \mathcal{A}(GDH)) \\ &= \mathcal{A}(ABCD) - \left[\frac{2}{9}\mathcal{A}(ABCD) + \frac{2}{9}\mathcal{A}(ABCD)\right] = \frac{5}{9}\mathcal{A}(ABCD)\end{aligned}$$

□

Para finalizar esta sección es necesario comentar el hecho de que para que esta prueba sea válida para cuadriláteros convexos y cruzados se debe considerar el concepto de área orientada.

## 5. Conclusiones.

- En este trabajo se ha realizado una sistematización de resultados relacionados con el teorema de Varignon entre los cuales podemos mencionar: diferentes demostraciones del teorema utilizando variadas técnicas y análisis de la forma que adquiere el paralelogramo de Varignon cuando el cuadrilátero dado tiene características especiales. Sin embargo, lo desarrollado no agota todas las posibilidades que pueden considerarse. Así por ejemplo, utilizando en primera instancia, un software de geometría dinámica, se podría intentar explorar una respuesta a las siguientes preguntas: ¿qué sucede si el cuadrilátero dado es un rectángulo o un cuadrado o un trapecio rectángulo o un romboide?. ¿Qué se obtiene si las diagonales del cuadrilátero inicial son perpendiculares, si tienen la misma longitud? y luego de esto intentar formalizar los resultados obtenidos, utilizando procedimientos análogos a los considerados aquí.
- Para trabajar en el aula de clase, con el apoyo de un software de geometría dinámica, es posible diseñar un taller que partiendo de cuatro puntos iniciales y, a través de preguntas dirigidas, se vayan construyendo modelos que permitan al estudiante con base en la exploración, experimentación y visualización conjeturar los resultados aquí considerados sin necesidad de que el docente los enuncie de manera apriori. La formalización de las conclusiones sería otra etapa a considerar pero naturalmente esto depende del nivel del grupo con el que se esté desarrollando la experiencia.
- Una pregunta que puede resultar interesante es: ¿Qué sucede si en lugar de tomar como polígono inicial un cuadrilátero se considera un polígono diferente?. Por ejemplo, un triángulo o un pentágono o, en general, un polígono de  $n$  lados y se intenta analizar los siguientes interrogantes. ¿tiene el polígono determinado por los puntos que dividen los lados del polígono dado en una razón dada alguna característica especial?. ¿Existe alguna relación entre las áreas de los dos polígonos?. Para su consideración, en este sentido una respuesta parcial a esta pregunta es la siguiente:

En un triángulo cualquiera,

- La razón entre el área del triángulo determinado por los puntos medios de los lados y el área del triángulo inicial es  $\frac{1}{4}$ . Ver lema 4.1.
- La razón entre el área del triángulo determinado por los puntos que dividen los lados en tres partes de igual longitud y el área del triángulo inicial es  $\frac{3}{9}$ . Ver lema 4.2.
- La razón entre el área del triángulo determinado por los puntos que dividen los lados en cuatro partes de igual longitud y el área del triángulo inicial es  $\frac{7}{16}$ .
- Para finalizar dos inquietudes. ¿Puede establecer una conjetura para la razón de las áreas, entre el triángulo determinado por los puntos que dividen los lados del triángulo dado en  $k$  partes de misma longitud y el triángulo inicial?. ¿le es posible demostrar su conjetura?.

## Referencias

- Altshiller-Court, Nathan (1924). “College geometry”. En: *The American Mathematical Monthly* 31.5, págs. 232-235.
- Coxeter, Harold Scott Macdonald y Samuel L Greitzer (1967). *Geometry revisited*. Vol. 19. Maa.
- Deswita, Leli et al. (2023). “Modification of the Varignon theorem on quadrilaterals”. En: *American Institute of Physics Conference Series*. Vol. 2480. 1, pág. 030006.
- Distéfano, María y Álvarez Mario (2022). *Análisis ontosemiótico de un problema geométrico*. URL: <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/analisis-ontosemiotico-de-la-resolucion-de-un-problema-geometrico/>.
- Isaacs, I Martin (2009). *Geometry for college students*. Vol. 8. American Mathematical Soc.
- Oliver, Peter N (2001a). “Consequences of the Varignon parallelogram theorem”. En: *The Mathematics Teacher* 94.5, págs. 406-408.
- (2001b). “Pierre Varignon and the parallelogram theorem”. En: *The Mathematics Teacher* 94.4, págs. 316-319.
- Schmidt, Q et al. (2006). “Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden [1]”. En.
- Simson, Robert et al. (1774). *Los seis primeros libros y el undecimo, y duodecimo de los elementos de Euclides: traducidos de nuevo sobre la version latina de Federico Comandino conforme a la fiel, y correctisima edicion de ella*. Por D. Joachin Ibarra.
- Varignon, Pierre (1731). *Éléments de mathématique de monsieur Varignon*. Brunet.