TENDENCIAS
Revista de la Facultad de Ciencias
Económicas y Administrativas.
Universidad de Nariño
Vol. XIV. No. 2 - 2do. Semestre 2013,
Julio-Diciembre - Páginas 98-119

APROXIMACIÓN MATEMÁTICA A LOS MODELOS BIOECONÓMICOS: ANÁLISIS DE CASO PARA EL MODELO MUTUALISTA DE LOTKA-VOLTERRA

Por: Víctor David Jaramillo Mejía[1] - Andrés Fernando Jaramillo Mejía[2] - Euclides Díaz Arcos[3]

"La Economía es una rama de la Biología ampliamente interpretada".
Alfred Marshall

RESUMEN

Este artículo busca generar una aproximación a los modelos bioeconómicos a partir del análisis teórico-matemático del modelo mutualista de Lotka-Volterra, con el objetivo de demostrar que las relaciones de cooperación entre dos especies son posibles, son una salida a las crisis ambiental y deben ser una alternativa para la sostenibilidad alimentaria, ambiental y humanitaria en todas las comunidades. Para ello se realizará un análisis conceptual del modelo propuesto desde la perspectiva de la bioeconomía y el biodesarrollo; luego, se realizarán los procedimientos matemáticos que posibiliten entender las dinámicas mutualistas propuestas desde el modelo de Lotka–Volterra demostrando que dos especies pueden subsistir en armonía bajo condiciones eficientes de tasas de crecimiento, capacidad de carga y competitividad. Se concluye, que la bioeconomía como un modo de desarrollo alternativo posibilita el progreso de los territorios, señalando la agroecología como ejemplo de trabajo.

Palabras claves: Bioeconomía, biodesarrollo, modelo mutualista de Lotka–Volterra.

Clasificación JEL: C35, C71, Q57

---

1. Economista de la Universidad de Nariño con estudios de posgrado en Economía del Desarrollo (FLACSO) y Máster en Dirección de Proyectos de la Universidad de Valladolid. Docente Universitario. Investigador adscrito al Centro de Estudios de Desarrollo Regional y Empresarial (CEDRE) de la Universidad de Nariño. mailto: victorjaramillo48@hotmail.com
2. Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Docente Universitario. Experto en minería de datos. mailto: andresjaramillo32@gmail.com
3. Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño. mailto: edarcos52@hotmail.com

MATH MODELS APPROACH BIOECONOMIC: CASE ANALYSIS FOR MUTUAL LOTKA-VOLTERRA

By: Víctor David Jaramillo Mejía - Andrés Fernando Jaramillo Mejía - Euclides Díaz Arcos

ABSTRACT

This article seeks to generate an approximation to bioeconomic models by the theoretical-mathematical analysis from the mutualistic model of Lotka-Volterra, in order to demonstrate that cooperative relations are possible between two species and they are a solution to the environmental crisis and should be an alternative for food sustainability, environmental and humanitarian situation in all communities. It is necessary to built a conceptual analysis of the proposed model from the perspective of the bioeconomy and biodevelopment, then mathematical procedures will be made in order to facilitate understanding of mutual dynamics from the model proposed of Lotka-Volterra, demonstrating that two species can live in harmony by growth rates, capacity and competitiveness. It is concluded that the bioeconomy as an alternative development mode makes possible better territories, standing out agroecology as a working zone example.

Key words: Bioeconomy, Biodevelopment, model Lotka-Volterra mutualistic.

JEL Classification: C35, C71, Q57

I. BIOECONOMÍA Y SU CONTRIBUCIÓN AL DESARROLLO

La actual crisis de mercado ha evidenciado como uno de los problemas fundamentales de las ciencias económicas ha sido su baja capacidad de interacción con ciencias como las naturales, las sociales o las físicas; centrando sus esfuerzos en el análisis de mercados y desconociendo la existencia de relaciones biológicas que se pueden generar en los entornos, bajo modelos holísticos y sistémicos.

Sobre este tema Nicholas Georgescu-Roegen (1994: 314), conocido como el padre de la bioeconomía y que basó sus supuestos en las leyes de la termodinámica y los análisis de Lotka, Schumpeter, entre otros teóricos, refiere la importancia de incorporar las leyes de la naturaleza en las teorías económicas así:

> *"Mi propia razón para afirmar que la economía debe ser una rama de la biología interpretada de forma amplia, descansa en el nivel más elemental de la cuestión. Somos una de las especies biológicas de este planeta, y como tal estamos sometidos a todas las leyes que gobiernan la existencia de la vida terrestre. Efectivamente somos una especie única, pero no porque hayamos obtenido el control total de los recursos de nuestra existencia. (…) la única característica que diferencia a la humanidad de todas las otras especies (…) es que somos la única especie que en su evolución ha violado los límites biológicos".*

De esa forma, los actuales esquemas de planeación y toma de política económica han fallado pues tratan de buscar el desarrollo en recetas económicas que desconocen particularidades y propenden por mejorar los indicadores de competitividad de los países en "vía de desarrollo", pero que no funcionan pues desconocen los temas de "territorialidad" y "biodiversidad".

En concordancia con lo anterior, el endogenismo se constituye en una alternativa de trabajo en búsqueda de bienestar social, pues su análisis discrepa de la teoría económica convencional y propone la formulación de modos de desarrollo propios, bajo conceptos de heterogeneidad, diversidad y complementariedad entre las diferentes áreas de estudio y la economía, de esta manera, se pueden generar interacciones positivas entre los ciclos artificiales del mercado y los procesos de consumo de recursos naturales y consumo de energía, es decir, posibilita dinámicas bioeconómicas.

En general, la bioeconomía juega un papel fundamental pues se define como:

> *"una economía que utiliza recursos biológicos a partir de la tierra y los océanos, así como desechos, como aportes para alimentos y alimentos para animales de producción, producción industrial y de energía… (lo cual) también incluye el uso de bio-procesos para industrias sostenibles. Los bio-desechos, por ejemplo, tienen un importante potencial como alternativa a los fertilizantes químicos o para su conversión en bioenergía"* (Comisión Europea, 2012).

Por lo anterior, la bioeconomía, como herramienta de interacción de las ciencias sociales, ciencias naturales, ciencias políticas, ciencias económicas, etc., permitiría generar un adecuado desarrollo territorial, cambiando el actual concepto de bienestar y negando los postulados antropocéntricos y antropomórficos que miran la naturaleza como inferior y desconocen las relaciones de dependencia o "mutualismo" en el ser humano y que por el contrario han fundamentado el modelo "presa-depredador", que en palabras de Georgescu-Roegan (1996), derivan en una alta entropía. Por ello, la bioeconomía se convierte en un camino para reducir la desigualdad, la violencia, el racismo, y consumismo, sin dejar de lado la tecnificación, pero respectando los ecosistemas, es decir, posibilitando un "biodesarrollo".

Finalmente, vale la pena aclararle al lector que los modelos bioeconómicos no representan una propuesta de modelos de desarrollo alternativos de tipo "superfuerte" (Gudynas, 2011: 83); sin embargo, se consideran modelos alternativos "dentro de la ideología del progreso y la modernidad" (Gudynas, 2011a: 47).

II. MUTUALISMO EN EL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

Antes de iniciar con el análisis formal de este modelo, es necesario resaltar que la teoría que fundamenta esta propuesta nace en los años 30, donde Alfred J. Lotka en 1930 y Vito Volterra en 1931, trabajando en forma independiente, pero con pensamientos similares desarrollan su trabajo más importante sobre dinámica poblacional, la cual propone tres principales tipos de interacción:

- Si la tasa de crecimiento de una población N_1 decrece y la otra población N_2 se incrementa, éstas están en una situación de depredador-presa.
- Cuando dos especies compiten por los recursos como alimento, agua, luz y espacio en un ecosistema, se presenta una interacción de competencia. Esto es, la tasa de crecimiento de dichas especies representa un decrecimiento de su población.
- Si para cada población la tasa de crecimiento aumenta, entonces la interacción es de *mutualismo* o simbiosis.

Así, el modelo de Lotka-Volterra supone la existencia de tres formas de interacción poblacional: depredación, competencia, y mutualismo, donde el objetivo de este estudio será la aplicación del modelo mutualista mediante procedimientos matemáticos con el fin de: a) plantear formalmente que las interacciones mutualistas son posibles en un territorio. b) esbozar una alternativa de biodesarrollo sin desconocer la necesidad de dinámicas económicas, y c) fortalecer el conocimiento que hasta el momento existe sobre la bioeconomía y los modelos bioeconómicos discretos.

De este modo, conceptualmente se puede decir que el mutualismo es una interacción biológica entre dos o más especies, en donde todos se benefician y mejoran su aptitud biológica, jugando un papel fundamental en la supervivencia y conservación de las poblaciones, a modo de ejemplo se puede establecer como producto de la relación mutualista, la dispersión de plantas y semillas donde juegan un papel fundamental las aves, insectos y otras especies, y a nivel económico de un modo muy simple y básico se presenta la necesidad imperante de convivencia entre los compradores y vendedores, empleador y empleados, etc.; sin embargo, el análisis puede ir más lejos si se intenta comprender el modelo de equilibrio de Cournot, el modelo de equilibrio de Bertrand, la teoría de juegos, o las interacciones bioeconómicas resultado de las sinergias entre el ser humano y la naturaleza, como por ejemplo, el modelo dinámico Gordon-Schaefer.

Así, se procederá a desarrollar el análisis matemático del modelo, no sin antes establecer que el artículo no busca generar demostraciones sobre el mutualismo, pues el desarrollo de procedimientos matemáticos anula la prueba de hipótesis sobre la utilidad del modelo y por el contrario, trabaja intrínsecamente con la afirmación de que el mutualismo es la forma adecuada de lograr la sostenibilidad y sustentabilidad del mundo actual.

III. ANÁLISIS MATEMÁTICO MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

1. Conceptos generales

A continuación se presentarán algunas definiciones y teoremas básicos de álgebra lineal utilizados para describir el mutualismo económico.

Definición 1.1. Se dice que $x = p \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ es un punto de equilibrio del problema de valor inicial P.V.I $\boldsymbol{x}' = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ es una solución constante del P.V.I

Definición 1.2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$. Un escalar λ es un valor propio de $\mathbf{A}$ si existe en $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ un vector columna $\mathbf{v}$ distinto de cero, tal que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{v}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio λ.

Definición 1.3. Una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ se llama diagonal si todos los registros que no están en la diagonal principal son cero.

Teorema 1.4. Si los valores propios de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de una matriz $\mathbf{A_{nxn}}$ son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de vectores propios $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ forman una base para $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. La matriz $\mathrm{P} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots \mathbf{v_n}\}$ es invertible y

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \operatorname{diag}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Además la solución del P.V.I para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \mathbf{A}x \\ x' &= \mathbf{B} \end{aligned} \tag{1}$$

con $x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{nxn}}$, viene dada por la expresión: $x(t) = \mathbf{PE}(t)\mathbf{P^{-1}}\mathrm{C}$, donde la matriz $\mathbf{E}$ (t) corresponde a $\mathbf{E}$ $(t) = \operatorname{diag}(e^{\lambda \mathbf{1t}}, e^{\lambda \mathbf{2t}}, \ldots e^{\lambda \mathbf{nt}})$, denota el tiempo en cualquier instante.

2. Modelo Propuesto

Como primer paso en la producción de un modelo mutualista se consideraran dos poblaciones N_1 (Seres humanos) y N_2 (Ambiente), se debe considerar el siguiente sistema.

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1} + b_{12}\frac{N_2}{K_1}\right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2} + b_{21}\frac{N_1}{K_2}\right), \qquad (2)$$

Con $r_1, r_2, K_1, K_2, b_{12}$ y b_{21} constantes positivas, donde r es la tasa intrínseca de crecimiento de cada especie y K es la capacidad de carga dada por el número de individuos que soporta un ecosistema[4], b_{12} y b_{21} miden el efecto de competitividad[5] de N_2 sobre N_1 y N_1 sobre N_2 respectivamente.

Cualquiera de las expresiones en el sistema (2), se reduce al modelo de crecimiento logístico, en ausencia de una de las especies, ya sea N_1 ó N_2; como se verá en el próximo apartado; mientras el factor N_1N_2 se introduce de forma positiva para representar que la interacción entre los entes mutualistas, conlleva su correspondiente beneficio.

3. Análisis del Modelo

Se prueba fácilmente que el sistema (2) equivale al sistema (3), en efecto,

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1(K_1 - N_1 + b_{12}N_2) = f_1(N_1, N_2)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} N_2(K_2 - N_2 + b_{21}N_1) = f_2(N_1, N_2) \qquad (3)$$

Si N_1 denota el número de la especie I y N_2 denota la cantidad de la especie II, entonces se puede observar que en ausencia de la especie II (es decir $N_2 = 0$), se tiene que

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1(K_1 - N_1) \qquad (4)$$

Se analizará la E.D. (4). Para ello se utilizará el método de variables separables y posteriormente fracciones parciales, para encontrar la solución general. En efecto,

4. Es importante entender un ecosistema no solo como un esquema de interacción de especies ligadas directamente a las ciencias naturales o puras, sino que puede verse como un escenario de intercambio social, económico, ecológico, etc., es decir, puede entenderse como cualquier escenario donde las poblaciones se encuentren bajo una disyuntiva en pro de maximizar su beneficio y reducir sus externalidades negativas.
5. Es decir, el grado de preponderancia de una especie sobre otra.

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1(K_1 - N_1)$$

$$\frac{dN_1}{N_1(K_1 - N_1)} = \frac{r_1}{K_1} dt$$

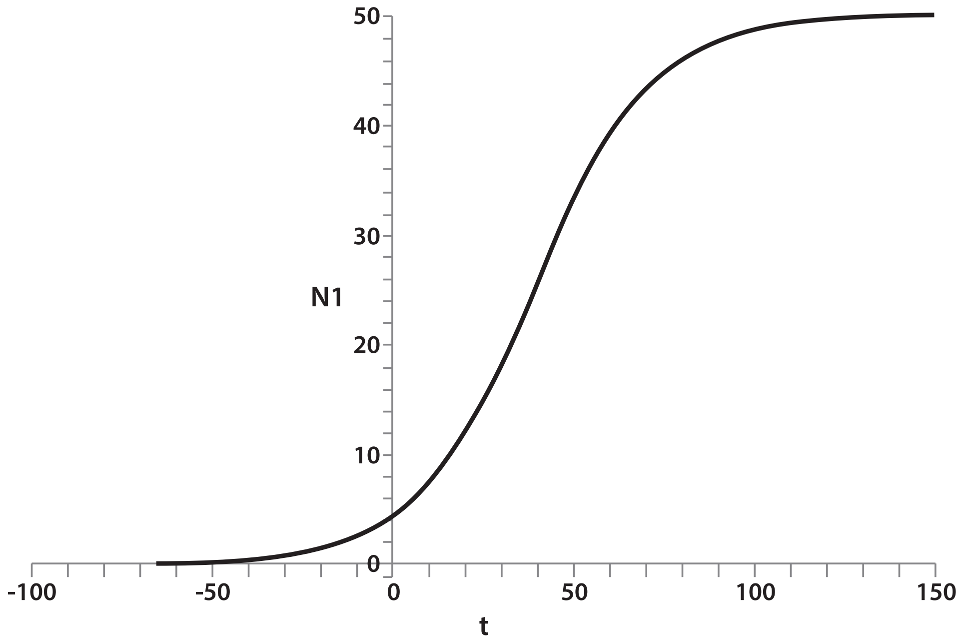
$$\frac{dN_1}{K_1 N_1} + \frac{dN_1}{K_1(K_1 - N_1)} = \frac{r_1}{K_1} dt$$

$$\frac{1}{K_1} \int \left(\frac{dN_1}{N_1} + \frac{dN_1}{(K_1 - N_1)} \right) = \frac{r_1}{K_1} \int dt + C_1$$

Realizando los procesos algebraicos necesarios se concluye que la solución de (4) es

$$N_1(t) = K_1 \frac{Ce^{r_1 t}}{1 + Ce^{r_1 t}}$$

Figura 1. CRECIMIENTO LOGÍSTICO DE *N_1*.



Ahora, el límite de la población N_1 cuando t crece indefinidamente, ($t \to \infty$) es

$$\lim_{t\to\infty} K_1 \frac{Ce^{r_1 t}}{1 + \ Ce^{r_1 t}} = \ K_1$$

Por lo tanto, la especie I en ausencia de la especie II crece de forma logística y tiende a la población de estado estable[6] K_1, como se ve en la figura 1. Realizando un análisis similar para la especie II que crece en ausencia de la especie I, se tiene que

$$N_2(t) = \ K_2 \frac{Ce^{r_1 t}}{1 + \ Ce^{r_1 t}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\infty} K_2 \frac{Ce^{r_1 t}}{1 + \ Ce^{r_1 t}} = \ K_2$$

4. Tipos de puntos críticos, estabilidad

Para determinar los puntos de equilibrio de (3), se encuentra la solución de las ecuaciones f_1 $(N_1, N_2) = 0$ y f_2 $(N_1, N_2) = 0$, es decir, se resuelven las siguientes ecuaciones:

$$\frac{r_1}{K_1} N_1(K_1 - N_1 + b_{12}N_2) = \ 0$$

$$\frac{r_2}{K_2} N_2(K_2 - N_2 + b_{21}N_1) = 0$$

- Si $N_1 = 0$ y $N_2 = 0$, entonces f_1 $(N_1, N_2) = 0$ y f_2 $(N_1, N_2) = 0$, luego el punto (0,0) es un punto crítico de (3).
- Si $N_1 = K_1$ y $N_2 = 0$, entonces f_1 $(N_1, N_2) = 0$ y f_2 $(N_1, N_2) = 0$, entonces el punto $(K_1,0)$ es un punto equilibrio del sistema (3).
- Si $N_2 = K_2$ y $N_1 = 0$, entonces f_1 $(N_1, N_2) = 0$ y f_2 $(N_1, N_2) = 0$, así el punto $(0,K_2)$ es un punto crítico de (3).

6. Basado en esta hipótesis, el modelo logístico plantea que inicialmente la población crece rápido, y pierde su capacidad de seguir creciendo debido al gran número de individuos existentes, los cuales se encuentran en relación continua y logran al final un equilibrio general. Supuesto muy cercano a la teoría de Solow de desarrollo convergente y que posteriormente Romer, Lucas y Barro mejoran argumentando que la tasa de crecimiento depende no solo de las relaciones de comercio, sino también del stock de tres factores: capital físico, capital humano y conocimientos (o progreso técnico), que pueden ser objeto de acumulación y, además, generan externalidades positivas que derivan rendimientos crecientes y competencia imperfecta. Por ello, los modelos bioeconómicos continuos basan su estabilidad no solo en las teorías de rendimientos marginales decrecientes, sino que contemplan la posibilidad de estados estacionarios de bienestar, cuando los mismos introducen una menor entropía.

- Si $N_2 = \dfrac{K_2 + K_1 \cdot b_{21}}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}$ y $N_1 = \dfrac{K_2 \cdot b_{12} + K_1}{1 - b_{12} \cdot b_{21}}$, contempla otro punto crítico, pero omitiremos las soluciones matemáticas alrededor de éste por la extensión de las operaciones.

  Ahora, se encontrará el jacobiano de la siguiente función

$$f(\mathbf{N}) = f(f_1, f_2)^T = \begin{pmatrix} \dfrac{r_1}{K_1} N_1(K_1 - N_1 + b_{12}N_2) \\ \dfrac{r_2}{K_2} N_2(K_2 - N_2 + b_{21}N_1) \end{pmatrix}$$

Para ello se calculan las primeras derivadas parciales de las funciones f_1 y f_2. Se denota la matriz jacobiana de la función f en el punto (N_1,N_2) con la expresión $Df(\mathbf{N}) = Df(N_1, N_2)$ y se define como:

$$Df(N_1,N_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial N_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial N_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{r_1\,(K_1 - 2N_1 + N_2 b_{12})}{K_1} & \dfrac{N_1 b_{12} r_1}{K_1} \\ \dfrac{N_2 b_{21} r_2}{K_2} & \dfrac{r_2(K_2 - 2N_2 + N_1 b_{21})}{K_2} \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana en el punto crítico (0,0) corresponde a

$$\mathbf{A} = Df(0,0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz jacobiana es diagonal, se tiene el siguiente sistema no acoplado.

$$\mathbf{N}'(t) = \mathbf{AN} \qquad (5)$$

Donde $\mathbf{N} = (N_1,N_2)^{\mathbf{T}}$. Es decir,

$$\mathbf{N}'(t) = \begin{pmatrix} N_1'(t) \\ N_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

De aquí se tiene $N'_1(t) = r_1 N_1$ y $N'_2(t) = r_2 N_2$. De la primera expresión,

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1$$

$$\frac{dN_1}{N_1} = r_1 dt$$

$$\int \frac{dN_1}{N_1} = r_1 \int dt + k_1$$

$$lnN_1 = r_1 t + k_1$$

$$N_1(t) = e^{r_1 t + k_1} = e^{r_1 t} e^{k_1} = c_1 e^{r_1 t}, c_1 = e^{k_1}$$

De manera análoga se tiene que, $N_2(t) = c_2 e^{r_2 t}$

Luego, la solución general de (5), donde c_1 y c_2 son números reales positivos es

$$N_1(t) = c_1 e^{r_1 t} \quad (6)$$

$$N_2(t) = c_2 e^{r_2 t} \quad (7)$$

En forma matricial la solución puede expresarse

$$\mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{pmatrix} N_0, \quad \text{donde} \quad \mathbf{N}_0 = (c_1, c_2)^T$$

$$\mathbf{N}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{N}_0$$

Por lo tanto, la solución general de (5) es

$$\mathbf{N}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{N}_0 \quad (8)$$

4.1. Retrato de fase y estabilidad del sistema (3) en el punto (0,0)

De las ecuaciones 6 y 7 se tiene:

- Para $C_2 = 0$

  $si\ t \to \infty\ y\ c_1 > 0\ entonces\ N_1 \to \infty$

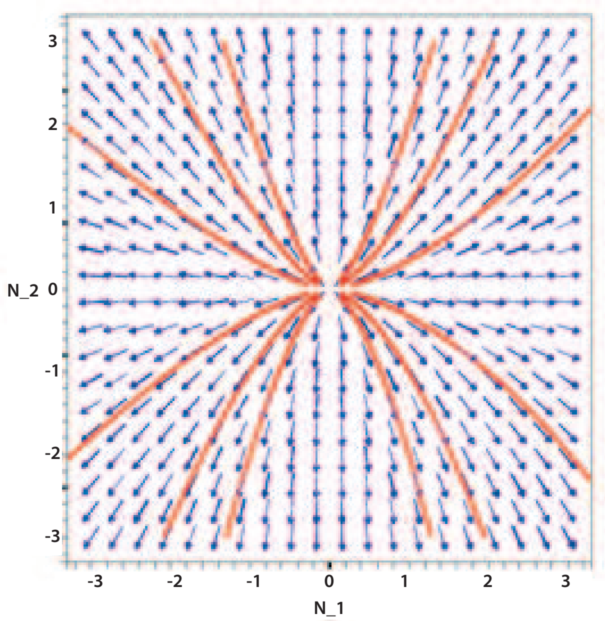
  $si\ t \to \infty\ y\ c_1 < 0\ entonces\ N_1 \to \infty$

- Para $C_1 = 0$

  $si\ t \to \infty\ y\ c_2 > 0\ entonces\ N_2 \to \infty$

  $si\ t \to \infty\ y\ c_2 < 0\ entonces\ N_2 \to \infty$

Figura 2. Punto fuente, sistema mutualista.



además, para cuando $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$ se tiene que

$$N_2(t) = c_2 (e^{r_2 t})^{\frac{r_1}{r_1}}$$

$$N_2(t) = c_2 (e^{r_1 t})^{\frac{r_2}{r_1}}$$

$$N_2(t) = c_2 \left(\frac{N_1}{c_1}\right)^{\frac{r_2}{r_1}} \quad \text{donde } e^{r_1 t} = \frac{N_1}{c_1}$$

$$N_2(t) = \frac{c_2}{c_1^{\frac{r_2}{r_1}}} N_1^{\frac{r_2}{r_1}}$$

Puesto que los valores propios de **A** son $\lambda_1 = r_1 > 0$ y $\lambda_2 = r_2 > 0$, entonces (0,0) es un punto fuente, además para $r_1 = r_2$, N_2 es función lineal de N_1, y así el punto será un nodo propio inestable, mientras que si $r_2 \neq r_1$, las curvas solución tendrán un aspecto de ramas de parábola (Ver figura 2) y por lo tanto en general, el nodo es impropio e inestable, pero sus interacciones positivas cercanas muestran que la interacción es mutualista y depende de la tasa intrínseca de crecimiento, la capacidad de carga, y el nivel de competitividad o cooperación[7].

7. El análisis de los retratos de fase representados en las figuras 2, 3, y 4, deben realizarse para los cuadrantes positivos, pues para toda población su intervalo de crecimiento es [0,).

Por su parte la matriz jacobiana para el punto crítico $(K_1,0)$ es

$$\mathbf{A} = Df(K_1,0) = \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 b_{12} \\ 0 & \dfrac{r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{K_2} \end{pmatrix}$$

Para el punto crítico se tiene el siguiente sistema acoplado:

$$\mathbf{N}'(t) = \mathbf{AN} \tag{9}$$

Puesto que la matriz **A** no es diagonal, para resolver este sistema se debe calcular valores y vectores propios de la matriz **A** y diagonalizar la matriz para encontrar la solución del sistema.

a) Valores propios de **A**:

Sea λ un valor propio de la matriz **A**, en cuyo caso el polinomio caracterizado de **A** es

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \boldsymbol{I_2}) \tag{10}$$

Donde $\boldsymbol{I_2}$ es la matriz idéntica de tamaño 2×2. Entonces,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\left[\begin{pmatrix} -r_1 & r_1 b_{12} \\ 0 & r_2\dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} -(r_1+\lambda) & r_1 b_{12} \\ 0 & r_2\dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(r_1+\lambda)\left(r_2\frac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} - \lambda\right) \end{aligned}$$

Para determinar los valores propios de **A**, se encuentran las raíces de la ecuación (10). En este caso se obtiene $\lambda_1 = -r_1$ y $\lambda_2 = r_2\dfrac{K_2 + K_1 \cdot b_{21}}{K_2}$

b) Vectores propios de **A**:

Para encontrar los vectores propios de la matriz **A**, se debe resolver el siguiente sistema

$$(\mathbf{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{11}$$

Donde **v** es un vector propio asociado al valor propio λ.

Sea $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2)^T \epsilon\, \mathbb{R}^2$ un vector propio de la matriz **A** asociado al valor $\lambda_1 = r_1$, por (11), $(\mathbf{A} + r_1 \boldsymbol{I}_2)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, luego se tiene que

$$(\mathbf{A} + r_1 \boldsymbol{I}_2)\mathbf{v}_1 = \left[\begin{pmatrix} -r_1 & \dfrac{r_1 b_{12}}{} \\ 0 & r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & r_1 b_{12} \\ 0 & r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} + r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se tiene $x_2 = 0$. Luego un vector propio es $\mathbf{v}_1 = (1{,}0)^T$. Para el vector **v2** $\in \mathbb{R}^2$ asociado al valor propio $\lambda_2 = r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2}$ se desarrolla $\mathbf{A} - \left(r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2}\right) \boldsymbol{I}_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Entonces,

$$\left(\mathbf{A} - (r_2 \frac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2}\right) \boldsymbol{I}_2)\mathbf{v}_2 = \left[\begin{pmatrix} -r_1 & r_1 b_{12} \\ 0 & r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix} - r_2 \frac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{r_2(b_{21}K_1 + K_2) + K_2 r_1}{K_2} & r_1 b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $\dfrac{r_2(b_{21}K_1 + K_2) + K_2 r_1}{K_2} x_1 - r_1 b_{12} x_2 = 0$, si $x_1 = 1$, entonces $x_2 = \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2}$, de aquí se sigue que $\mathbf{v}_2 = (1, \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2})^T$.

Ahora la matriz $\mathbf{P} = (\mathrm{v}_1\ \mathrm{v}_2)$ es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)} \begin{pmatrix} \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)} \\ 0 & \dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)} \end{pmatrix}$$

Por teorema (1.4) se tiene

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)} \\ 0 & \dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 b_{12} \\ 0 & r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 + b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \dfrac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

Ahora, por teorema (1.4) la solución general en forma matricial viene dada por la expresión $\mathbf{N}(t) = \mathbf{PE}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}_0$, donde $\mathbf{E}(t) = \operatorname{diag}\left(e^{-r_1 t}, e^{r_2 \frac{K_2 + b_{21}K_1}{K_2} t}\right)$. Entonces se tiene que

$$\mathbf{N}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_2 r_1 + r_2(K_2 - b_{21}K_1)}{r_1 b_{12} K_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{r_2(K_2 - b_{21}K_1)t}{K_2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 - b_{21}K_1)} \\ 0 & \dfrac{r_1 b_{12} K_2}{K_2 r_1 + r_2(K_2 - b_{21}K_1)} \end{pmatrix} \mathbf{N}_0$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-r_1 t} & \dfrac{K_2 b_{12} r_1 e^{-r_1 t}\left(e^{t \cdot \frac{K_1 \cdot b_{21} \cdot r2 + K2 \cdot (r_1 + r2)}{K2}} - 1\right)}{K_1 \cdot b_{21} \cdot r_2 + K2 \cdot (r_1 + r2)} \\ 0 & e^{r_2 t \frac{K_1 b_{21} + K_2}{K_2}} \end{pmatrix} \mathbf{N}_0 \quad , \quad \text{donde} \quad \mathbf{N}_0 = (c_1, c_2)^T.$$

Por componentes, la solución general es

$$N_1(t) = c_1 e^{-r_1 t} + c_2 \frac{K_2 b_{12} r_1 e^{-r_1 t}\left(e^{t \cdot \frac{K_1 \cdot b_{21} \cdot r2 + K2 \cdot (r_1 + r2)}{K2}} - 1\right)}{K_1 \cdot b_{21} \cdot r_2 + K2 \cdot (r_1 + r2)} \quad \text{y}$$

$$N_2(t) = c_2 e^{r_2 t \frac{K_1 b_{21} + K_2}{K_2}}$$ con c_1 y c_2 constantes positivas.

4.1 Retrato de fase y estabilidad del sistema en el punto $(K_1, 0)$

La solución para el sistema lineal asociado $\mathbf{N}_d(t) = \mathbf{A}\mathbf{N}_d$ en el punto $(K_1, 0)$, es

$$N_{1d}(t) = c_1 e^{-r_1 t}$$

$$N_{2d}(t) = c_2 e^{r_2 t \frac{K_1 b_{21} + K_2}{K_2}}$$

Desparametrizando, colocando $N_{2d}(t)$ en función de $N_{1d}(t)$, estas ecuaciones se tiene

$$N_{1d}(t) = c_1 e^{-r_1 t} \Rightarrow e^{-r_1 t} = \frac{N_{1d}}{c_1}$$

Ahora, hacemos lo correspondiente con N_{2d} donde se ha cambiado

$$\mu = r_2 \frac{K_1 b_{21} + K_2}{K_2} > 0:$$

$$N_{2d}(t) = c_2 e^{\mu t} \Rightarrow N_{2d}(t) = c_2 (e^{\mu t})^{\frac{-r_1}{-r_1}} = c_2 (e^{-r_1 t})^{\frac{\mu}{-r_1}} = c_2 (\frac{N_{1d}}{c_1})^{-\frac{\mu}{r_1}}$$

Así:

$$N_{2d} = \frac{c_2 c_1^{\frac{\mu}{r_1}}}{N_{1d}^{\mu/r_1}}$$

Se evidencia así la aparición de la familia de hipérbolas alrededor de este punto en el retrato de fase, puesto que N_{2d} es inversamente proporcional a $N_{1d}^{\frac{\mu}{r_1}}$.

En la figura 3 se observa que las curvas en el diagrama de fase, son hipérbolas entorno del punto $(K_1, 0)$, ahora dado que los valores propios de la matriz **A** tienen parte real positiva y parte real negativa, se deduce que le punto de equilibrio $(K_1, 0)$ es un punto silla inestable del sistema (9), pero al igual que en la figura 2, se observan interacciones mutualistas que dependerán de la tasa intrínseca de crecimiento, la capacidad de carga, y el nivel de competitividad o cooperación, resumidas en el factor $\frac{\mu}{r_1}$ que por ser positivo asegura el crecimiento de las dos especies.

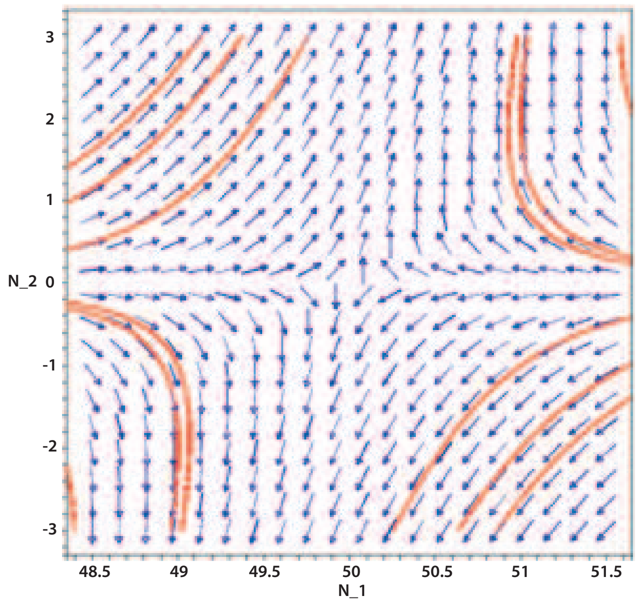


Figura 3. Punto silla, sistema mutualista

En el punto crítico $(0, K_2)$, la matriz jacobiana es la siguiente:

$$\mathbf{A} = Df(0, K_2) = \begin{pmatrix} \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} & 0 \\ r_2 b_{21} & -r_2 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz **A** no es diagonal, se tiene un sistema acoplado. Se procede de manera similar al análisis del punto crítico $(K_1, 0)$ para encontrar la solución general del sistema (9).

a) Valores propios de A:

Sea λ un valor propio de la matriz **A**. se tiene que:

$$p\ \lambda = \det\left[\begin{pmatrix} \frac{r_1\ K_1 + K_2 b_{12}}{K_1} & 0 \\ r_2 b_{21} & -r_2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Luego de hacer las correspondientes operaciones (como anteriormente se había visto) se encuentran los valores propios $\lambda_1 = -r_2$ y $\lambda_2 = \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1}$

b) Vectores propios de A:

Sea $v_1 = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ un vector propio de la matriz **A** asociado al valor $\lambda_1 = -r_2$, por (11), $(\boldsymbol{A} - r_2 I_2)v_1 = \mathbf{0}$, luego se tiene que

$$(A - r_2 I_2)v_1 = \left[\begin{pmatrix} \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} & 0 \\ r_2 b_{21} & -r_2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De este sistema se obtiene el vector propio asociado al valor propio λ_1:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para el valor propio λ_2, se desarrolla el sistema:

$$\left(A - \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} I_2\right)v_2 = \left[\begin{pmatrix} \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} & 0 \\ r_2 b_{21} & -r_2 \end{pmatrix} - \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde $v_2 \in \mathbb{R}^2$. Se obtiene la ecuación:

$$\frac{K_1\big(b_{21} r_2 x_1 - x_2(r_1 + r_2)\big) - K_2 b_{12} r_1 x_2}{K_1} = 0$$

que para $x_2 = 1$, se tiene que $x_1 = \dfrac{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2}{K_1 b_{21} r_2}$.

Entonces el vector propio asociado al valor propio λ_2 corresponde a

$$v_2 = \begin{pmatrix} \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2}{K_1 b_{21} r_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, por el teorema (1.4) la matriz $P = (v_1 v_2)$ es invertible y su inversa se encuentra aplicando la proposición (1.2). Entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2}{K_1 b_{21} r_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{K_1 b_{21} r_2}}{\mathrm{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})}} & 1 \\ \dfrac{\mathrm{K_1 b_{21} r_2}}{\mathrm{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})}} & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, aplicando el teorema (1.4) se tiene

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{K_1 b_{21} r_2}}{\mathrm{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})}} & 1 \\ \dfrac{\mathrm{K_1 b_{21} r_2}}{\mathrm{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} & 0 \\ r_2 b_{21} & -r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2}{K_1 b_{21} r_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r_2 & 0 \\ 0 & \dfrac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} \end{pmatrix} = \ diag\ (\lambda_1, \lambda_2)$$

Ahora la solución matricial

$$N(t) = PE(t)P^{-1}N_0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2}{K_1 b_{21} r_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-r_2 t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1 t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{K_1 b_{21} r_2}{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})} & 1 \\ \dfrac{K_1 b_{21} r_2}{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{N_0}$$

$$N\ \ t\ = \begin{pmatrix} e^{r_1 t \frac{K_1 + K_2 b_{12}}{K_1}} & 0 \\ K_1 b_{21} r_2 e^{-r_2 t} \dfrac{e^{t \frac{K_1\ r_1 + r_2\ + K_2 b_{12} r_1}{K_1}} - 1}{K_1\ r_1 + r_2\ + K_2 b_{12} r_1} & e^{-r_2 t} \end{pmatrix} \boldsymbol{N_0}$$

Por medio de componentes, la solución es

$$N_1(t) = c_1 e^{\frac{r_1(K_1 + K_2 \cdot b_{12})}{K_1} t}$$

$$N_2(t) = c_1 \frac{K_1 b_{21} r_2 e^{-r_2 t}\left(e^{t \frac{K_1 r_2 + r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1}} - 1\right)}{r_1(K_1 + K_2 b_{12}) + K_1 r_2} + c_2 e^{-r_2 t}$$

Con

$$N_0 = \binom{c_1}{c_2}$$

4.3 Retrato Fase y Estabilidad del sistema en $(0, K_2)$

La solución para el sistema lineal asociado en el punto $(0, K_2)$ es

$$N_{1d}(t) = c_1 e^{\frac{r_1(K_1 + K_2 b_{12})}{K_1} t}$$

$$N_{2d}(t) = c_2 e^{-r_2 t}$$

Y de forma similar que para el punto $(K_1, 0)$ se tiene por desparametrización,

$$N_{1d}(t) = c_1 (e^{\tau t})^{\frac{-r_2}{-r_2}}$$

$$N_{1d}(t) = c_1 (e^{-r_2 t})^{\frac{\tau}{-r_2}}$$

$$N_{1d} = c_1 \left(\frac{N_{2d}}{c_2}\right)^{\frac{\tau}{-r_2}}$$

$$N_{1d} = \frac{c_1 c_2^{\frac{\tau}{r_2}}}{N_{2d}^{\frac{\tau}{r_2}}}$$

Donde $\tau = \dfrac{r_{1(K_1 + K_2 b_{12})}}{K_1}$.

Así, como en el punto crítico anterior, se puede observar por la relación inversamente proporcional entre las variables N_{1d} y N_{2d} una familia de hipérbolas cercanas al punto $(0, K_2)$.

De este modo la figura 4 permite corroborar lo mencionado y observar el comportamiento de las poblaciones en la vecindad de este punto.

Dado que los valores propios de la matriz **A** tienen parte real positiva y parte real negativa, se concluye que el punto $(0, K_2)$ es un punto silla e inestable del sistema (9), con relaciones mutualistas positivas en su escenario positivo.

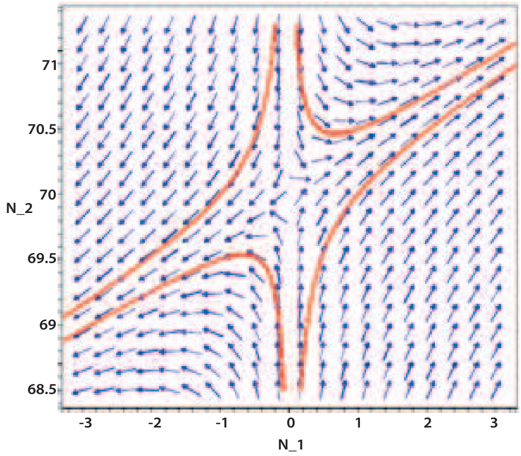


Figura 4. Punto silla, sistema mutualista

4.4 Ejemplo del modelo mutualista

Para un análisis del punto crítico $\left(\dfrac{K_1 + K_2 b_{12}}{1 - b_{12} b_{21}}, \dfrac{K_1 b_{21} + K_2}{1 - b_{12} b_{21}}\right)$, se muestra su retrato de fase obtenido por métodos computacionales aplicando los siguientes parámetros:

$r_1 = 0.2, \quad r_2 = 0.3, \quad K_1 = 50, \quad K_2 = 70, b_{12} = 0.5 \ y \ b_{21} = 0.4.$

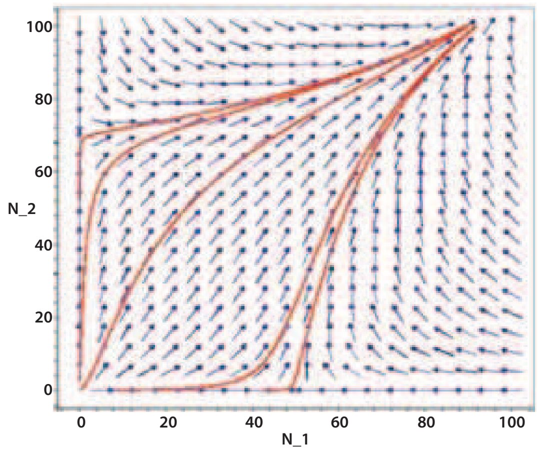


Figura 5. Ejemplo modelo mutualista

donde se aprecia como dos especies que comparten una relación mutualista, tienden a estabilizar el crecimiento de ambas poblaciones, cerca del punto crítico (K_1, K_2) con cierta probabilidad a sobrepasar el límite impuesto por la capacidad de carga del ecosistema.

CONCLUSIONES

Los procedimientos matemáticos expuestos, demostraron que el modelo es inestable en los punto silla, es decir donde las relaciones entre las poblaciones no existen, pero a la vez, permitió establecer que dos especies pueden tener relaciones de cooperación que les permita desarrollarse, bajo unas condiciones preestablecidas de: tasas de crecimiento, capacidad de carga y competitividad (figura 5).

El modelo mutualista de Lotka-Volterra constituye un avance teóricomatemático importante para el desarrollo de esquemas de sostenibilidad y sustentabilidad ambiental enmarcados dentro de la bioeconomía y el biodesarrollo.

La bioeconomía se está constituyendo en una alternativa de búsqueda de bienestar social para las poblaciones desde la endogeneidad y la territorialidad. Ejemplo de ello son las prácticas Agroecológicas que en países como España, Estados Unidos, Australia, Ecuador, Bolivia y Colombia, se han iniciado.

La bioeconomía debe ser un elemento de trabajo en la planeación territorial del departamento de Nariño, pues el contemplar relaciones de equilibrio bioeconómico (Gordon, 1954) puede mejorar la sustentabilidad ambiental, la especialización productiva y la dinámica competitiva del departamento.

La bioeconomía sumada a procesos ciencia, tecnología e innovación (CTeI) puede dar soluciones a los problemas de energía, alimentos, salud y cambio climático, generando beneficios económicos, biológicos y sociales, para gran parte de la población mundial. Aquí, Latinoamérica puede generar un papel importante, pues su alto potencial en recursos, y su alta importancia como fuente de alimentos y biomasa, brinda a este continente una oportunidad para liderar procesos de sostenibilidad ambiental, sostenibilidad alimentaria, y bienestar social de la población mundial.

Por todo lo anterior, la planeación económica, social y política, tiene grandes posibilidades de cambiar los actuales entornos de crisis: ambiental, alimentaria, humanitaria y económica. Pero para ello la población debe concienciarse de la necesidad de mantener límites frente a la producción y el poder del mercado, sobre ello Absalón Machado (2011) establece que el desarrollo rural en Colombia dependerá de que exista "más Estado en el mercado y menos mercado en el Estado", refiriéndose a la necesidad de que la planeación nacional debe replantearse y debe colocar limites a esa explotación irracional de los recursos, pues solo ello permitirá garantizar una sostenibilidad ambiental, alimentaria y económica en este país; sin embargo, esta debe considerarse una medida urgente frente a las actuales alarmas a las distintas crisis.

Finalmente, este artículo se convierte en una aproximación teórico – matemática al análisis de modelos de biodesarrollo, por ende, es necesario iniciar trabajos investigativos que posibiliten mejorar este análisis y permitan tener una mejor visión sobre los modelos bioeconómicos discretos y continuos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GEORGESCU–ROEGEN, Nicholas (1996). La Ley de la Entropía y el proceso económico. Madrid: Fundación Argentaria - Visor Dis. Traducido del texto original: (1971) The Entropy Law and the Economic Process (Cambridge, Harvard Universty Press).

GORDON, Scott (1954). The economics of a common property resource. The fishery. J. Polit. Econ. 62: 124-142

GUDYNAS, Eduardo (2011). Desarrollo, Derechos de la Naturaleza y Buen Vivir después de Montecristi, pp 83-102, En: Debates sobre cooperación y modelos de desarrollo. Perspectivas desde la sociedad civil en el Ecuador. Gabriela Weber, editora. Centro de Investigaciones CIUDAD y Observatorio de la Cooperación al Desarrollo, Quito. Marzo 2011.

GUDYNAS, Eduardo (2011a). Debates sobre el desarrollo y sus alternativas en América Latina: Una breve guía heterodoxa, pp 21-53, En "Más allá del desarrollo", Grupo Permanente de Trabajo sobre Alternativas al Desarrollo (M. Lang y D. Mokrani, eds.). Fundación Rosa Luxemburgo y AbyaYala, Quito, 2011.

MURRAY, J.D. Mathematical Biology: I. An Introduction. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, Volumen 17, Third Edition. 92 (2002). 551 pp. ISBN: 0-387-95223-3

PERKO, Lawrence. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg. Texts Applied Mathematics 7, Third Edition. 25 (2001). 570 pp. ISBN: 0-387-95116-4.

MOHAMMADIAN, Mansour (2000). Bioeconomics: Biological Economics. Interdisciplinary Study of Biology, Economics and Education. Entrelíneas Editores. Madrid.

PNUD. 2011. Colombia rural. Razones para la esperanza. Informe Nacional de Desarrollo Humano 2011. Bogotá: INDH PNUD, septiembre.