TENDENCIAS
Revista de la Facultad de Ciencias
Económicas y Administrativas.
Universidad de Nariño
Vol. XI. No. 2
2do. Semestre 2010, páginas 7-34

OFERTA Y DEMANDA: UN MODELO MATEMÁTICO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Por: Hernán Alberto Escobar J.[1]

RESUMEN

Se presentan inicialmente unas ideas relacionadas con los modelos matemáticos en general, para luego enfocarse en uno muy concreto: el que utiliza como insumo básico las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Dado que el modelo de oferta y demanda, utiliza para su explicación matemática y económica, las ecuaciones diferenciales lineales, se lleva a cabo una explicación de cómo obtener una solución analítica y gráfica de dichas ecuaciones. Posteriormente, se explica con detalle los elementos básicos para definir con lenguaje de ecuaciones diferenciales los conceptos de oferta, demanda y el principio económico que los une, a través del planteamiento y solución de varios ejemplos de aplicación.

Palabras clave: Ecuación diferencial homogénea (EDO), Ecuación lineal no homogénea de primer orden, Condiciones iniciales, Problema de valor inicial (PVI), Oferta y Demanda.

ABSTRACT

First, some ideas related to general mathematical models are presented. Later, it will be focused in a very specific one, which uses Ordinal Differential Equations (ODE's) as its basic component. Because the Supply and Demand Economic Model uses linear differential equations for its mathematical and economic explanation, a description on how to obtain an analytic and

1. Profesor Titular adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.

graphic solution of such equations is carried out. Subsequently a detailed explanation of the basic elements to define with differential equations language the supply and demand concepts and the economic principle that bounds them through the planning and solving of several application examples.

Key words: Ordinal differential equation (ODE), First order nonhomogeneous linear equation, Initial conditions, Initial value problem (IVP), Supply and demand.

INTRODUCCIÓN

MODELOS.- En términos generales un modelo es una representación de un sistema, objeto o fenómeno. El sistema solar, la economía de un país, la población de peces en un lago, un satélite girando sobre su órbita, un proyectil lanzado desde una plataforma, son ejemplos muy comunes de sistemas.

La representación siempre maneja menos información que la que el sistema contiene. Esto es importante, porque la representación sólo debe tener la información que es relevante y apropiada para el objetivo que se persigue. De manera que un modelo puede considerarse como una simplificación o idealización del sistema en particular.

Por tanto la modelación matemática es el proceso de formular comportamientos del mundo real en términos matemáticos. En el proceso de modelación matemática, lo que se hace normalmente es construir una descripción de un fenómeno de la vida real en términos matemáticos. La pregunta que inmediatamente surge es: ¿ Para qué ? La respuesta es múltiple: la información obtenida por el modelo matemático permitiría:

- Comprender cómo funciona el sistema

- Qué ocasiona cambios en el sistema

- Qué tan sensible (estable) es el sistema a ciertos cambios

- Qué cambios se producirán en el sistema

- Cuándo ocurrirán los cambios.

Dado que las matemáticas utilizan teoremas y técnicas para hacer deducciones lógicas y trabajar con ecuaciones, en sí mismas proporcionan un contexto donde puede realizarse un análisis libre de conceptos preconcebidos sobre el resultado. Además tiene gran importancia práctica el hecho de que las matemáticas posibilitan un formato o esquema para obtener respuestas numéricas que tienen sentido en el sistema.

Los modelos matemáticos pueden ser de diversa naturaleza: desde estructuras sencillas, hasta otras más complejas y elaboradas. Asimismo, pueden diferenciarse entre deterministicos y probabilísticos, dependiendo si se introduce o no incertidumbre en su respuesta. La primera categoría se utiliza generalmente en la predicción de datos concretos, mientras que, la segunda, es preferentemente usada en el caso de eventos con cierto grado de incertidumbre, como por ejemplo, en la estimación de lluvias y eventos climáticos y volcánicos o el pronóstico de precios de unos bienes de consumo. Estos patrones inciden en la precisión del resultado, que obviamente es menos certero en el último caso.

Pero también pueden dividirse en otras clases. Existen los análogos que utilizan la similitud que se puede establecer entre una variable de interés y otra diferente, a la cual se recurre para obtener una representación aproximada. Y los físicos, donde la correspondencia es equivalente, determinada y recíproca entre una misma variable que se encuentra tanto en el modelo, como en la realidad que representa.

Independientemente del tipo de modelo matemático, hoy por hoy, es un instrumento muy útil para estudiar problemas en disciplinas tan diversas como física, química, biología, hidrología, mecánica, ingeniería e incluso en ciencias sociales y económicas, que permite describir, explicar y predecir fenómenos y procesos que son relevantes para el desarrollo de investigaciones en éstas áreas.

1. EL MODELO MATEMÁTICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Es conveniente anotar que desde el punto de vista estrictamente matemático existen muchos modelos, los cuales describen igualmente, una amplia gama de situaciones reales. Uno de ellos es el que utiliza ecuaciones diferenciales, para lo cual será necesario definir algunos elementos indispensables en torno a esa herramienta matemática.

1.1 ECUACION DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra las derivadas de una función de una o varias variables. Dicha función se la llama función desconocida o función incógnita o variable dependiente.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su tipo, orden y linealidad.

1.1.1 Clasificación según el tipo. Si la función desconocida depende de una sola variable, la ecuación se llama ecuación diferencial ordinaria

(EDO). En cambio si la función desconocida depende de varias variables la ecuación se llama ecuación diferencial parcial.

Así por ejemplo, en la EDO

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \qquad (1)$$

$y = y(x)$ es la función desconocida y x es la variable independiente.

Cuando aparecen derivadas de orden superior tales como $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$

se utilizan con frecuencia las notaciones respectivas $y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$.

En la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 5t\frac{du}{dt} - 8u = 0 \qquad (2)$$

La función desconocida es $u = u(t)$ y la variable independiente es t.

En la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

$u = u(x,y)$ es la función desconocida y x, y son la variables independientes.

1.1.2 Clasificación según el orden.- el orden de una ecuación diferencial lo determina el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Se utiliza para ello números ordinales. La EDO (1) es de primer orden, la EDO (2) es de segundo orden, en tanto que la ecuación en derivadas parciales (3) es de segundo orden.

Se puede afirmar en general, que una EDO es una relación entre la función desconocida, la variable independiente y las derivadas de la función desconocida respecto a la variable independiente. Con símbolos se puede escribir

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

La ecuación diferencial (4) es ordinaria de n-ésimo orden.

La EDO ordinaria de primer orden se puede escribir entonces como

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (5)$$

1.1.3. Clasificación según la linealidad.- Se dice que una EDO es lineal, si tanto la función desconocida como sus derivadas están elevadas a la potencia uno. Por tanto la EDO (4) es lineal si F es lineal respecto $y', y'', \ldots y^{(n)}$. La ecuación (2) es ordinaria, de segundo orden y lineal.

La EDO lineal de n-ésimo orden, no homogénea, con función desconocida $y = y(x)$ se puede escribir como

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \qquad (6)$$

en la cual $p_i(x)$, $q(x)$ son funciones de x continuas.

Si $q(x) = 0$ la ecuación (6) toma la forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (7)$$

Esta última ecuación se llama ecuación diferencial de n-ésimo orden, homogénea con FD $y = y(x)$.

1.2 SOLUCION DE UNA EDO

Una función cualquiera definida en un intervalo I, n veces derivable, que al sustituirse en una EDO de n-ésimo orden, la reduce a una identidad, es una solución de dicha ecuación en I . Con símbolos:

$y = \phi(x)$ es solución de la EDO $F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ si y solo si

$$F\ (x,\phi(x),\phi'(x),\phi''(x),\ldots\phi^{(n)}(x)) \equiv\ 0 \text{ para todo } x \text{ en } I$$

1.2.1 Comprobación de una solución.- Para comprobar que una función dada es la solución de una EDO, se procede a derivar la función las veces que sea necesario, y luego se sustituye en la EDO, y esta última debe convertirse en una identidad.

Por ejemplo, la función $y = -6 / (x^2 + 1)$ es solución de la ecuación diferencial de primer orden $y' = -2xy / (x^2 + 1)$

En efecto, derivando la función dada se obtiene:

$$y' = 12x / (x^2 + 1)^2$$

Sustituyendo en la ecuación de primer orden:

$$12x / (x^2 + 1)^2 = -2x(-6 / (x^2 + 1)) / (x^2 + 1)$$

Entonces,

$$12x / (x^2 + 1)^2 \equiv\ 12x / (x^2 + 1)^2$$. Por tanto si es solución.

1.2.2 Curva solución.- La gráfica de una solución $y = \phi\ (x)$ de una EDO, se llama curva solución. En el ejemplo del aparte 1.2.1, la gráfica de la función $y = -6 / (x^2 + 1)$, solución de la EDO $y' = -2xy / (x^2 + 1)$ se puede ver en la figura 1.1, la cual tiene validez en el intervalo $(-\infty, \infty)$

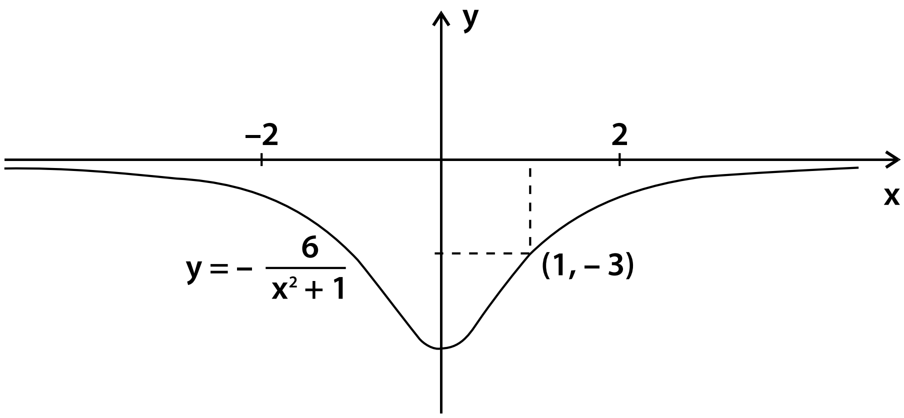

Figura 1.1

1.2 EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

En muchas ocasiones, se necesita resolver una EDO sujeta al cumplimiento de ciertas condiciones las cuales se imponen a la función desconocida y sus derivadas, en el mismo valor del argumento y son conocidas como condiciones iniciales.

Cuando se plantea la resolución de una EDO, sujeta al cumplimiento de una condición inicial, se origina un problema de valor inicial (PVI).

Por ejemplo, el PVI de primer orden se plantea de forma general como

$$\text{Resolver } F(x, y, y',) = 0 \qquad \text{sujeta a } y(x_0) = y_0 \tag{8}$$

Desde un punto de vista geométrico, se busca la curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0). En la figura 1.1., se puede ver la gráfica correspondiente a la solución del PVI

$$y' = -2xy / (x^2 + 1); \qquad y(1) = -3$$

2. ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una EDO lineal de primer orden es de la forma

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{9}$$

en donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas de x.

La ecuación (9) es una ecuación lineal de primer orden no homogénea.

Si $q(x) = 0$, entonces

$$y' + p(x)y = 0 \tag{10}$$

La ecuación (11) es una ecuación lineal de primer orden homogénea.

2.1 SOLUCIÓN DE UNA EDO LINEAL DE PRIMER ORDEN

Para hallar la solución general de la EDO lineal no homogénea (10), existen varios procedimientos.

Uno de ellos, denominado factor integrante[2] permite encontrar la solución general de la citada ecuación como:

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

la cual se puede escribir de la siguiente forma

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx} + e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \qquad (11)$$

3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Una EDO lineal de segundo orden es de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (12)$$

en donde las funciones *f(x)* y *q(x)* son continuas en un intervalo abierto *I* de números reales.

La EDO (12) es una ecuación lineal de segundo orden no homogéneo.

Si $f(x) = 0$ entonces la ecuación (12) se puede escribir como:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (13)$$

La ecuación (13) es lineal de segundo orden y homogénea.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Establece que si dos funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal y homogénea (13) en un intervalo I, entonces la combinación lineal $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general de dicha ecuación, en donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Por ejemplo, las funciones $y_1 = e^{-3x}$ y $y_1 = e^{-2x}$ por separado son soluciones de la ecuación homogénea de segundo orden $y'' + 5y' + 6y = 0$. El

2. El método del factor integrante para resolver EDOs lineales no homogéneas es bastante conocido y empleado con mucha frecuencia en problemas que involucran este tipo de ecuaciones diferenciales. Para mayor profundización ver Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de Modelado de Dennis Zill, Thomson, 2002. pp. 61-66.

principio de superposición permite asumir que la combinación arbitraria $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$ es la solución general de dicha ecuación. En efecto

$$y' = 3C_1e^{-3x} - 2C_2e^{-2x}; \quad y'' = 9C_1e^{-3x} + 4C_2e^{-2x}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación propuesta se obtiene

$$y'' + 5y' + 6y = \left[9C_1e^{-3x} + 4C_2e^{-2x}\right] + 5\left[-3C_1e^{-3x} - 2C_2e^{-2x}\right] + 6\left[C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}\right]$$

$$= \left[9C_1 - 15C_1 + 6C_1\right]e^{-3x} + \left[4C_2 - 10C_2 + 6C_2\right]e^{-2x}$$

$$= \left[0\right]e^{-3x} + \left[0\right]e^{-2x} = 0 + 0 = 0$$

Por tanto la combinación arbitraria $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x}$ es la solución general de la ecuación $y'' + 5y' + 6y = 0$ dado que las funciones e^{-3x} y e^{-2x} son linealmente independientes.

3.2 ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0 \tag{14}$$

Donde a_1 y a_2 son constantes reales.

Para hallar la solución general de la ecuación (14), se aplica la técnica de la ecuación característica, la cual es una ecuación algebraica asociada a toda ecuación de este tipo. Para este caso la ecuación característica es de la forma

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{15}$$

Puesto que los coeficientes a_1 y a_2 son reales, se presentan tres posibilidades:

3.2.1 Raíces reales y diferentes. La ecuación cuadrática (15) tiene raíces reales y diferentes α y β, en cuyo caso las funciones linealmente independientes soluciones por separado, de la ecuación (15) son $e^{\alpha x}$ y $e^{\beta x}$. Por tanto la solución general de la ecuación (14) es:

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

3.2.2 Raíces reales e iguales.- En este caso la raíz α de la ecuación característica es doble o sea se repite dos veces. La funciones linealmente independientes que son soluciones de la ecuación lineal homogénea son $e^{\alpha x}$ y $xe^{\alpha x}$. De manera que su solución general es:

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

3.2.3 Raíces complejas conjugadas.- Las raíces de la ecuación característica son de la forma $\lambda = \alpha \pm i\beta$. En consecuencia las funciones linealmente independientes soluciones de la ecuación (14) son $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x} sen\beta x$. De esta manera la solución de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes es

$$y_h = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} sen\beta x$$

3.3 ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes es de la forma

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \qquad (16)$$

En donde a_1 y a_2 son constantes reales y *f(x)* es una función continua en el intervalo abierto *I*. La solución general de la ecuación (16) es la suma de la solución general y_h de la ecuación homogénea correspondiente y una solución particular y_p de la ecuación no homogénea, esto es

$$y = y_h + y_p \qquad (17)$$

La solución y_p se la obtiene por medio del método de los coeficientes indeterminados.

3.3.1 Método de los coeficientes indeterminados.- En dependencia de la forma de *f(x)* y las raíces de la ecuación característica se pueden obtener las soluciones particulares buscadas y_p. Se presentan tres alternativas:

1) $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$ es decir es un polinomio de grado m.

1.1) Si $\lambda = 0$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m$$

donde los B_i son coeficientes por determinar

1.2) $\lambda = 0$ es raíz de la ecuación característica, de multiplicidad $\alpha \leq 2$, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = x^{\alpha} \left[B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m \right]$$

donde los B_i son coeficientes por determinar

2) $f(x) = e^{px} \left[A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m \right]$, es decir se trata de un polinomio de grado m multiplicado por e^{px}.

2.1) Si $p = 0$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = e^{px} \left[B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m \right]$$

donde los B_i son coeficientes por determinar.

2.2) Si $p = 0$ es raíz de la ecuación característica, de multiplicidad $\beta \leq 2$, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = x^{\beta} e^{px} \left[B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m \right]$$

los B_i son coeficientes por determinar.

3) $f(x) = e^{px} \left[M(x) \cos qx + N(x) senqx \right]$ donde $M(x)$ y $N(x)$ son polinomios, uno de ellos de grado m y el otro de grado no mayor que m.

3.1) Si $p + iq$ no es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = e^{px} \left[M_m(x) \cos qx + N_m(x) senqx \right]$$

Donde $M_m(x)$ y $N_m(x)$ son polinomios de grado m con coeficientes por determinar.

3.2) Si $p + iq$ es raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular es de la forma

$$y_p = xe^{px}\left[M_m(x)\cos qx + N_m(x) sen qx\right]$$

Donde $M_m(x)$ y $N_m(x)$ son polinomios de grado m con coeficientes por determinar.

Antes de resolver un ejemplo de aplicación, conviene decir que al igual que las ecuaciones de primer orden, se pueden plantear PVI con ecuaciones de segundo orden. Este tipo de problemas se plantean así:

Resolver la ecuación lineal no homogénea de segundo orden $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ sujeta a las condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$

EJEMPLO 3.1

Resolver la ecuación $y'' - 3y' = 1 - x$ sujeta a $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$.

SOLUCIÓN

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$. Las funciones linealmente independientes que le corresponden son $y_1 = 1$ y $y_2 = e^{3x}$. Por consiguiente la solución general de la ecuación homogénea es $y_h = C_1 + C_2e^{3x}$. Ahora bien, como $\lambda = 0$ es raíz simple de la ecuación característica (primer caso), entonces la solución particular de la ecuación no homogénea es de la forma $y_p = x[B_0x + B_1]$, donde B_0 y B_1 son coeficientes por determinar.

Derivando y_p dos veces y reemplazando y''_p, y'_p y y_p en la ecuación no homogénea propuesta, se obtiene

$$-6B_0x + 2B_0 - 3B_1 = 1 - x$$

Igualando los coeficientes de las potencias respectivas, se puede escribir que $B_0 = 1/6$ y $B_1 = -2/9$.

Por consiguiente la solución particular es $y_p = x\,[(1/6)x - 2/9]$. De esta manera la solución general de la ecuación propuesta es

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + x\big[(1/6)x - 2/9\big]$$

Como se trata de resolver un PVI, entonces es necesario aplicar las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$ en esta última expresión y se obtiene que $C_1 = 7/27$ y $C_2 = 20/27$. Finalmente, reemplazando estos valores en la ecuación de la solución general se obtiene la solución particular del PVI inicialmente planteado:

$$y = 7/27 + (20/27)e^{3x} + x\big[(1/6)x - 2/9\big] \text{ o bien}$$

$$y = (20/27)e^{3x} + (1/6)x^2 - (2/9)x + 7/27$$

4. OFERTA Y DEMANDA

Sea $p = p(t)$ la función precio de un bien en el tiempo. El número de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo, en cualquier tiempo t se llama <u>demanda</u> y se denota por $D = D(t)$. Esta demanda puede depender no sólo del precio p en cualquier tiempo t, sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomarán los precios, esto es, la tasa de cambio del precio $p'(t)$

Con símbolos, la dependencia de $D(t)$, $p(t)$, y de $p'(t)$ se puede escribir como:

$$D = f\,\big(p(t),\, p'(t)\big)$$

Así, *f* <u>es la función de demanda</u>

Análogamente, el número de unidades del bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo, en cualquier tiempo t se llama <u>oferta</u> y se denota por $S = S(t)$. Como en el caso de la demanda, la oferta depende de $p(t)$ y $p'(t)$, esto es:

$$D = f\,\big(p(t),\, p'(t)\big)$$

Por tanto, *g* <u>es la función de oferta</u>.

Para que las anteriores consideraciones tengan sentido, se debe asumir lo siguiente:

a) Economía competitiva y libre.- Esto significa que los consumidores y productores compiten para determinar los precios.

b) No hay demora en el suministro.- En la ecuación se asume que los productores usan la tasa de cambio del precio en el tiempo esto es para decidir sobre la oferta que está disponible. Esto es una aproximación a la realidad, puesto que en la práctica hay una demora entre el tiempo de producción real y el mercadeo al consumidor. En tal caso se reemplazaría por:

$$S = g\left(p(t-T),\, p'(t-T) \right)$$

c) No se consideran los precios de otros bienes.- En este modelo económico los precios de otros bienes en el mercado no se tienen en cuenta.

d) Los precios, demanda y oferta son continuos.- Los precios toman valores discretos, pero en la práctica, se pueden aproximar con un buen grado de precisión adoptando valores continuos.

4.1 PRINCIPIO ECONÓMICO DE OFERTA Y DEMANDA

El precio de un bien en cualquier tiempo t o sea $p(t)$, está determinado por la condición de que la demanda en t es igual a la oferta[3] en t, es decir

$$f\left(p(t),\, p'(t) \right) = g\left(p(t),\, p'(t) \right)$$

Como se puede ver la ecuación anterior es una EDO de primer orden, con función desconocida $p = p(t)$

Ahora bien, las formas más simples de f y g son funciones lineales en $p(t)$ y $p'(t)$, esto es:

$$D = a_1 p(t) + a_2 p'(t) + a_3$$

$$S = b_1 p(t) + b_2 p'(t) + b_3$$

3. Es conveniente decir que el modelo matemático de oferta y demanda con ecuaciones diferenciales tiene sentido si se está trabajando en un modelo perfectamente competitivo, esto es, un cambio en la producción, no afecta el precio del producto. Mayor ilustración en Matemáticas para la Economía de Isabel Pérez-Grasa y otros. Mc Graw-Hill, 2001. pp. 279-281.

en donde a_1 y b_1 son constantes reales.

Aplicando el principio económico de oferta y demanda $D = S$ se obtiene:

$$a_1 p(t) + a_2 p'(t) + a_3 = b_1 p(t) + b_2 p'(t) + b_3$$

Operando:

$$p'(t) + \left[(a_1 - b_1) / (a_2 - b_2) \right] p(t) = (b_3 - a_3) / (a_2 - b_2) \qquad (18)$$

con $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_3 \neq b_3$.

La EDO (18) es lineal no homogénea, con FD $p = p(t)$.

Si la ecuación está sujeta a la condición inicial $p(0) = p_0$ se origina el PVI definido como:

$$p'(t) + \left[(a_1 - b_1) / (a_2 - b_2) \right] p(t) = (b_3 - a_3) / (a_2 - b_2)$$

$$p(0) = p_0 \qquad (19)$$

La solución particular del problema (19) en concordancia con la ecuación (11) y después de aplicar la condición inicial $p(0) = p_0$: es

$$p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} + \left[p_0 - \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} \right] e^{-[(a_1 - b_1)/(a_2 - b_2)]t} \qquad (20)$$

Se presentan varias posibilidades:

Caso 1.- Si $p_0 = (b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$ entonces de (20) se obtiene que $p(t) = p_0$ situación en la cual los precios son <u>constantes</u> todo el tiempo.

Caso 2.- Aquí el precio *p(t)* tiende a $(b_3 - a_3) / (a_1 - b_1)$ como el límite cuando *t* crece, asumiendo que este límite es positivo. En este caso se tiene estabilidad de precios y el límite $(b_3 - a_3) / (a_1 - b_1)$ se llama precio de equilibrio.

Caso 3.- $(a_1 - b_1)/(a_2 - b_2) < 0$. En este caso, el precio *p(t)* crece indefinidamente, a medida que *t* crece, asumiendo que $p_0 > (b_3 - a_3)/(a_1 - b_1)$. Se presenta aquí inflación continuada o inestabilidad de precios.

EJEMPLO 4.1

La oferta y la demanda de un bien están dados en miles de unidades respectivamente por $S = 160 - 5p(t) - 3p'(t)$ y $D = 40 + 3p(t) + p'(t)$. El precio del bien en $t = 0$, es *US$ 20*.

a) Encontrar el precio en cualquier tiempo *t* posterior y obtener su gráfico.

b) Determinar si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con el principio económico de oferta y demanda se puede escribir

$$160 - 5p(t) - 3p'(t) = 40 + 3p(t) + p'(t)$$

Operando y simplificando

$$p'(t) + 2\,p(t) = 30 \qquad (34)$$

La solución general de la ecuación lineal y no homogénea anterior de acuerdo a la ecuación (11) es

$$p = C\,e^{-2x} + 15$$

b) Para determinar si existe estabilidad de precio y el precio de equilibrio, es necesario resolver el PVI

$$p'(t) + 2\,p(t) = 30 \;;\; p(0) = 20$$

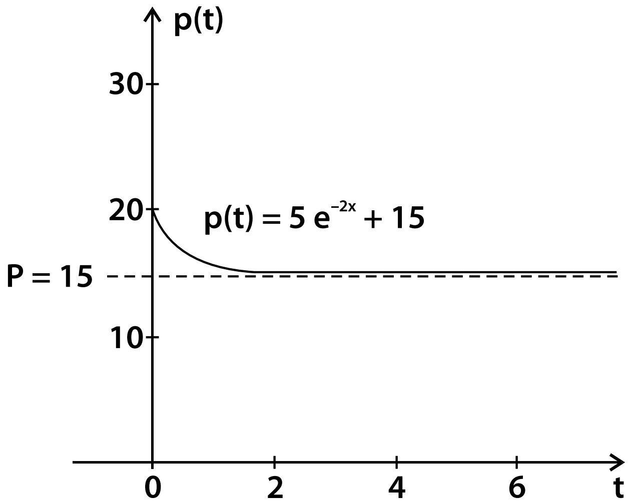

Figura 4.1

Puesto que $p = Ce^{-2x} + 15$, al aplicar la condición inicial $p(0) = 20$ se obtiene

$$20 = Ce^{-2x} + 15; C = 5$$

De esta manera el precio está definido como

$$p = 5e^{-2x} + 15$$

En la figura 4.1 se puede ver la representación gráfica (curva solución) de *p(t)*

Por otra parte, cuando $t \to \infty$, $p \to 15$. Entonces se puede concluir que en este caso se presenta estabilidad de precio, y el precio de equilibrio es *US$15*, lo cual corresponde al caso 2), pues p es positivo.

EJEMPLO 4.2

La oferta y la demanda de un cierto bien están dadas en miles de unidades respectivamente por $S = 60 - p(t) - 3p'(t)$ y $D = 120 + p(t) - 5p'(t)$. Si el precio del bien en $t = 0$, es *US$5*, determinar

a) El PVI asociado a esta situación.

b) El precio del bien en cualquier tiempo t.

c) Estabilidad y precio de equilibrio, si los hay.

SOLUCIÓN

a) Aplicando el principio económico de oferta y demanda, se tiene

$$120 + p(t) - 5p'(t) = 60 - p(t) - 3p'(t)$$

Operando

$$-2p'(t) + 3p(t) = -60 \quad ; \quad p'(t) - 3/2\, p(t) = 30$$

En consecuencia el PVI asociado a este problema es

$$p'(t) - (3/2)\, p(t) = 30 \quad ; \quad p(0) = 5$$

b) La solución general de la ecuación lineal y no homogénea

$$p'(t) - (3/2)\, p(t) = 30$$

Se escribe como

$$p = Ce^{(3/2)t} - 20$$

aplicando la condición inicial $p(0) = 5$, se obtiene

$$5 = Ce^{(3/2)0} - 20; C = 25$$

En consecuencia el precio en cualquier tiempo está dado por

$$p = 25e^{(3/2)t} - 20$$

En la figura 4.2, se puede ver la gráfica de $p = 25e^{(3/2)t} - 20$.

Fácilmente se puede apreciar que cuando $t \to \infty$, $p \to \infty$. De esta manera se puede concluir que en este caso, no existe estabilidad de precio y desde luego no existe precio de equilibrio, situación que concuerda con lo estipulado en el caso 3).

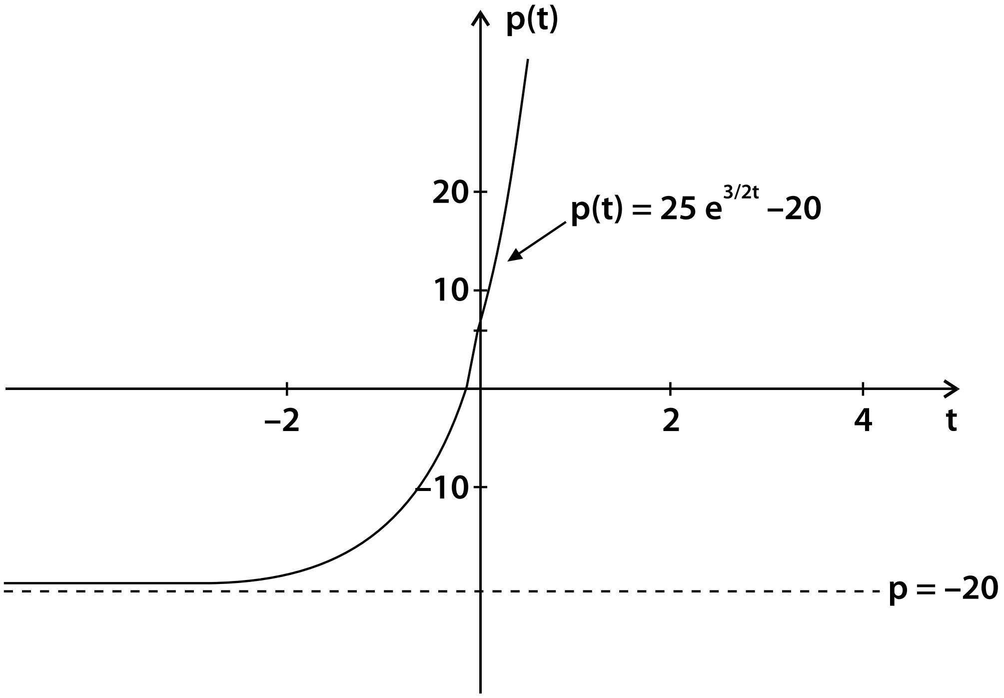

Figura 4.2

EJEMPLO 4.3

Se plantea y resuelve a continuación un problema en el que después de aplicar el principio económico de oferta y demanda, la ecuación diferencial resultante, tiene como segundo miembro una función de t, y no un valor numérico como en dos los ejemplos anteriormente resueltos.

La demanda y la oferta de un bien están dadas en miles de unidades por las ecuaciones $D = 240 - 8p(t) - 2p'(t)$ y $S = 24\left(2 - e^{-2t}\right) + 16p(t) + 10p'(t)$ respectivamente. En $t = 0$, el precio del bien es de *US$12.*

a) Encontrar el precio en cualquier tiempo t y obtener su gráfico.

b) Determinar si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe alguno.

SOLUCIÓN

a) Por el principio económico de oferta y demanda, se tiene

$$24\left(2 - e^{-2t}\right) + 16p(t) + 10p'(t) = 240 - 8p(t) - 2p'(t)$$

$$p'(t) + 2p(t) = 16 + 2e^{-2t}$$

La solución general de esta ecuación lineal no homogénea es

$$p = Ce^{2t} + \left(8 + 2te^{-2t}\right)$$

b) Para examinar si existe o no estabilidad de precio, se aplica la condición inicial $p(0) = 12$ y se obtiene $C = 4$. Sustituyendo este valor en la expresión de p:

$$p = 4e^{-2t} + 8 + 2te^{-2t} \; ; \; p = \left(4 + 2t\right)e^{-2t} + 8$$

Esta función determina el precio en cualquier tiempo *t*, y su gráfico se puede ver en la figura 4.3.

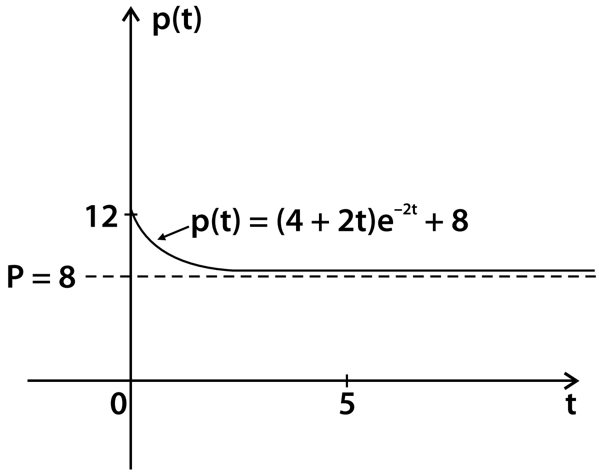

Figura 4.3

Cuando $t \to \infty$, $p \to 8$, entonces se presenta estabilidad de precio y el precio de equilibrio es *US$8.*

5. INVENTARIOS

El principio económico de oferta y demanda no examina la situación dinámica donde la oferta y la demanda no son iguales. En este caso la oferta varía con el tiempo para satisfacerla. Si por ejemplo, la oferta es mayor que demanda, entonces los productores tienen en su haber una cierta cantidad de bien, la cual se llama <u>inventario</u>, el cual por supuesto, esperan vender.

Si la situación se presenta al contrario, es decir la demanda es mayor que la oferta, entonces los productores deben adquirir inventario. El problema es entonces, formular matemáticamente cómo el inventario cambia con el tiempo como un resultado de la interacción de oferta y demanda. El procedimiento se explica a continuación:

Sea $q(t)$ el número de unidades de un bien cualquiera en un tiempo t. La variación instantánea de $q(t)$ es precisamente la diferencia entre oferta y demanda:

$$\frac{dq}{dt} = S - D \tag{21}$$

En el caso especial en que q es constante, $S = D$

Ahora, si se supone que el productor desea proteger sus utilidades, para lo cual se requiere que la tasa a la cual incrementará el precio sea proporcional a la tasa a la cual declina el inventario, esto es:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha \frac{dq}{dt} \tag{22}$$

donde $\alpha > 0$ es constante de proporcionalidad, que se asume conocida.

Reemplazando (21) en (22):

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha (S - D) \tag{23}$$

La EDO (23) es lineal y no homogénea. Si además se impone la condición inicial $p(0) = p_0$, se puede definir el siguiente PVI:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha (S - D)\ ;\ p(0) = p_0 \tag{24}$$

No está por demás hacer notar que S y D son funciones de p.

EJEMPLO 5.1

La oferta y la demanda de un producto de consumo, están definidas en términos del precio por las expresiones: $S = 60 + 2p$ y $D = 120 - 3p$. Si la constante de proporcionalidad es $\alpha = 4$ y el precio inicial es 8 unidades monetarias:

a) Definir el PVI asociado a esta situación.

b) Resolver el PVI y graficar la solución.

SOLUCIÓN

a) La ecuación diferencial del PVI para este problema toma la forma:

$$\frac{dp}{dt} = -4\left[(40+2p)-(120-3p)\right]$$

$$\frac{dp}{dt} + 20p - 240 = 0$$

Como $p(0) = 8$ entonces el PVI se define como:

$$\frac{dp}{dt} + 20p - 240 = 0 \;;\; p(0) = 8$$

b) La solución general de la EDO $\frac{dp}{dt} + 20p - 240 = 0$ es

$$ln\,\left(p-12\right) = 20t + K \;;\quad p-12 = Ce^{-20t}$$

Aplicando condición inicial $p(0) = 8$ en esta última expresión:

$$8 = 12 + C; \quad C = -4$$

Y por consiguiente la solución particular del PVI se escribe como:

$$p(t) = 12 - 4e^{-20t}$$

$p(t)$ expresa el precio de venta en cualquier tiempo

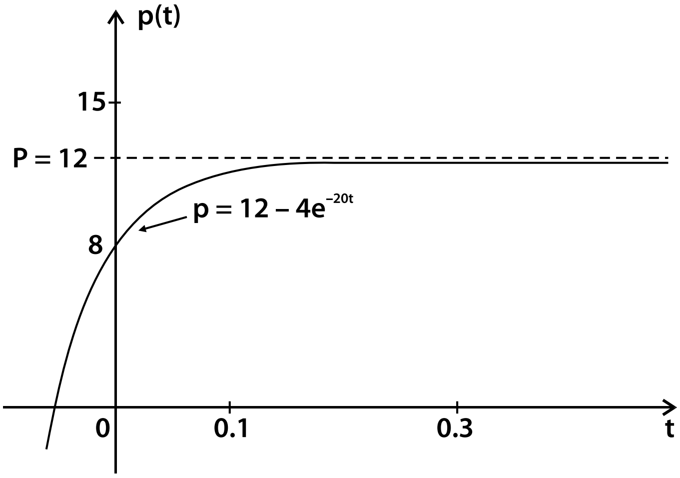

Figura 5.1

Nótese en la figura 5.1 que el precio se incrementa de 8 a 12 unidades monetarias. Así, $p = 12$ es el precio de equilibrio.

6.1 EL FACTOR INFLACIONARIO

El precio de un bien de consumo es una función de la oferta y la demanda del mismo, tal como se lo anotó anteriormente. Para buscar un modelo que describa el precio del bien, es claro asegurar que tal precio cambia con el tiempo como resultado de la inflación, la cual se denota por $F(t)$. Por otra parte se asume que la tasa de cambio del precio es precisamente $\frac{dp}{dt}$ el cual es directamente proporcional a la diferencia entre la oferta S en el tiempo t y alguna oferta de equilibrio S_0.

Si $S > S_0$, la oferta es demasiado grande y el precio tiende a decrecer.

Si $S < S_0$, la oferta es demasiado pequeña y el precio tiende a subir, de modo que la constante de proporcionalidad debe ser negativa y se denota por $-k_1$.

Estas consideraciones conducen al planteamiento de la EDO lineal no homogénea de primer orden:

$$\frac{dp}{dt} = F(t) - k_1(S - S_0) \qquad (25)$$

También se asume que la tasa de cambio de la oferta $\frac{dS}{dt}$ es proporcional a la diferencia entre el precio p y algún precio de equilibrio p_0. Si se denota por K_2 esa constante de proporcionalidad, se puede plantear la ecuación lineal homogénea de primer orden

$$\frac{dS}{dt} = k_2(p - p_0) \qquad (26)$$

Si $p < p_0$ el precio es demasiado bajo y por consiguiente $\frac{dS}{dt} < 0$, es decir la oferta decrece.

Si $p > p_0$ el precio es demasiado alto, $\frac{dS}{dt} > 0$ y la oferta aumenta, así $k_2 > 0$.

De la ecuación (25) se despeja S para obtener

$$S = S_0 + \frac{1}{k_1}\left[F(t) - \frac{dp}{dt}\right] \qquad (27)$$

Derivando la expresión (27) respecto a t se obtiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{k_1}\left[F'(t) - \frac{d^2p}{dt^2}\right] \tag{28}$$

Igualando (26) y (28):

$$\frac{1}{k_1}\left[F'(t) - \frac{d^2p}{dt^2}\right] = k_2(p - p_0)$$

Simplificando

$$\frac{d^2p}{dt^2} + (k_1k_2)p = F'(t) + (k_1k_2)p_0 \tag{29}$$

La ecuación diferencial (29) es lineal no homogénea de segundo orden con función desconocida $p = p(t)$ en la cual está involucrado el factor inflacionario $F(t)$. Considerando $F(t) = \alpha$, α es constante, la ecuación (29) se transforma en

$$\frac{d^2p}{dt^2} + (k_1k_2)p = (k_1k_2)p_0 \tag{30}$$

La ecuación diferencial (30) tiene coeficientes constantes y la ecuación característica asociada a ella, es de la forma $\lambda^2 + k_1k_2 = 0$. Por consiguiente $\lambda = \pm i\sqrt{k_1k_2}$. De esta manera las funciones linealmente independientes que le corresponden son $\cos\sqrt{k_1k_2}\,t$ y $sen\sqrt{k_1k_2}\,t$. Así, la solución general de la ecuación diferencial (30) es

$$p = p_0 + C_1\cos\sqrt{k_1k_2}\,t + C_2 sen\sqrt{k_1k_2}\,t \tag{31}$$

Sustituyendo (31) en (27) se tiene

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} + C_1\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}sen\sqrt{k_1k_2}\,t - C_2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\cos\sqrt{k_1k_2}\,t \tag{32}$$

Si se asume que para $t = (0)$, $p(0) = p_0$ y $S(0) = S_0$ se encuentra que $C_1 = 0$ y $C_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{k_1k_2}}$. Reemplazando los valores de las constantes C_1 y C_2 en (31) y (32) se obtiene

$$p = p_0 + \frac{\alpha}{\sqrt{k_1 k_2}} sen\sqrt{k_1 k_2}\,t \qquad (33)$$

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} - \frac{\alpha}{k_1} \cos\sqrt{k_1 k_2}\,t \qquad (34)$$

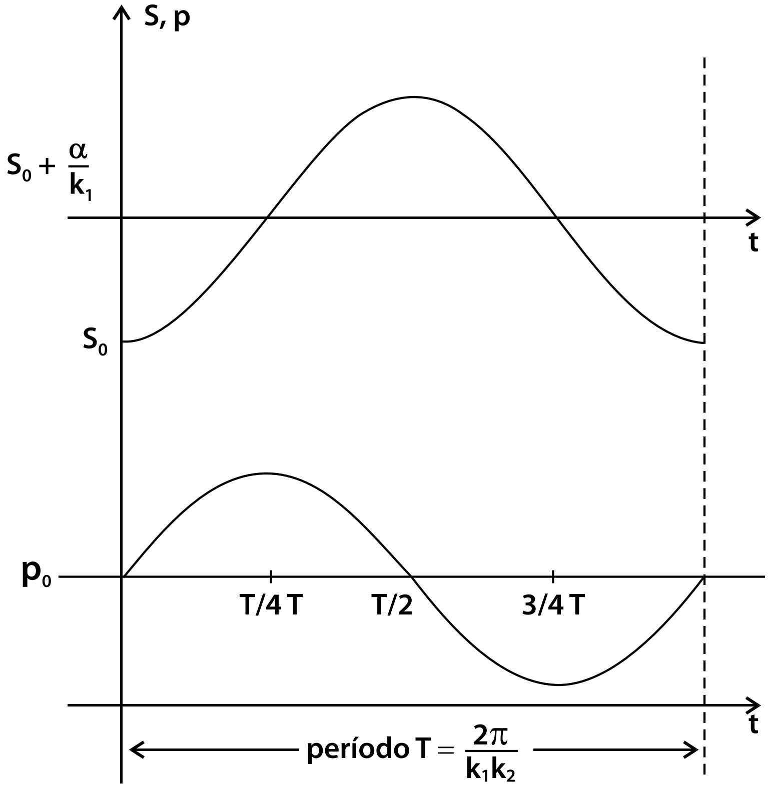

Figura 6.1

En la figura 6.1 se muestra el comportamiento de S y p los cuales oscilan sinusoidalmente alrededor de $p_{\mathbf{0}}$ y $S_0 + \frac{\alpha}{k_1}$ respectivamente.

Si la ecuación (34) se escribe como

$$S = S_0 + \frac{\alpha}{k_1} + \frac{\alpha}{k_1} sen\sqrt{k_1 k_2}\,t\left[t - \frac{\pi}{2\sqrt{k_1 k_2}}\right] \qquad (35)$$

se puede constatar que el precio está delante de la oferta en un tiempo igual a 1/4 del periodo T, o que la oferta está detrás del precio en un $T/4$, con $T = 2\pi / \sqrt{k_1 k_2}$. En síntesis, si el precio máximo ocurre en algún tiempo particular, la oferta máxima ocurre algún tiempo $T/4$ más tarde, que cuando el precio ha caído.

6. PRECIOS FUTUROS

En el parágrafo 4.1, se estableció el principio económico de oferta S y demanda D, el cual establece que el precio de un bien en cualquier tiempo t, está determinado por la condición de que la demanda en t sea igual a la oferta en t, esto es $S = D$. Si se asume que tanto la demanda como la oferta son lineales, después de igualar oferta y demanda se obtiene una ecuación lineal y no homogénea, cuya solución conduce al análisis de diferentes situaciones, las cuales fueron abordadas en los ejemplos 4.1 a 4.3 y 5.1

En este modelo, se ha considerado que las funciones de oferta y demanda dependen del precio en un instante. Sin embargo es frecuente que tanto vendedores como compradores tomen sus decisiones no sólo en función del precio del bien en el instante presente, sino también en función de la tendencia de dicho precio, puesto que el estudio de esa tendencia crea expectativas sobre los precios futuros, influyendo desde luego en la oferta y la demanda.

Para introducir estas expectativas en el modelo matemático, se debe suponer que las funciones de oferta y demanda no sólo dependen de p y p' sino también de p''. En estas condiciones las funciones de oferta y demanda se definen respectivamente por $S = S(p, p', p'')$ y $D = D(p, p', p'')$.

Aplicando el principio económico de oferta y demanda se puede escribir

$$S(p, p', p'') = D(p, p', p'')$$

Lo cual origina una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes, con función desconocida $p(t)$ de la forma

$$a_0 p''(t) + a_1 p'(t) + a_2 p(t) = b$$

EJEMPLO 7.1

Si la demanda y la oferta de cierto bien de consumo están definidas respectivamente por $D = 5p'' - 4p' + 11$ y $S = 6p'' - 2p' + 2p - 4$, estudiar el comportamiento de p.

SOLUCIÓN

Al igualar *D* y *S* se define la ecuación lineal no homogénea de segundo orden:

$$p'' + 2p' + 5p = 15$$

La ecuación característica asociada es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ cuyas raíces son complejas conjugadas de la forma $\lambda = 1 \pm 2i$. Las funciones linealmente independientes que le corresponden son:

$$e^{-t}\cos 2t \;\; \text{y} \;\; e^{-t}sen2t$$

y por tanto, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es

$$y_h = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t} sen 2t$$

Ahora bien, la solución particular de la ecuación no homogénea de acuerdo a lo, estipulado en el parágrafo 3.3 1 es $y_p = 3$. En consecuencia la solución general de la ecuación no homogénea es:

$$y = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t} sen2t + 3$$

La figura 7.1 ilustra algunas curvas integrales.

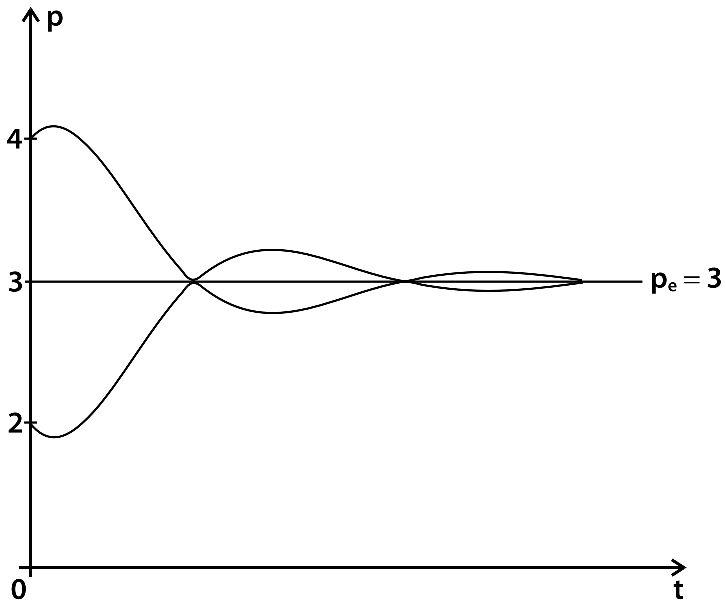

Figura 7.1

Nótese que una solución particular de dicha ecuación es precisamente $p_e = 3$ el precio de equilibrio. Además la trayectoria temporal del precio converge de manera oscilante al precio de equilibrio $p_e = 3$.

CONCLUSIONES

- Dado que la Economía es la ciencia que se ocupa de estudiar la manera como se administran recursos escasos con el objeto de producir bienes y servicios, intentar dar a solución a problemas de este tipo, a través de un modelo matemático es una tarea bastante compleja y difícil, si se tiene en cuenta la amplia gama de factores endógenos y exógenos que rodean al problema en sí mismo. Más aún, como se trata de una disciplina científica fundamentalmente social, que tiene como principal razón al ser humano y todo su entorno sostenible, se debe reconocer que se trabaja con seres vivos fuertemente sensibles a variables no explicativas en los ámbitos de los modelos utilizados. De ahí que, esos modelos deben estar sometidos a permanentes validaciones y ajustes, paralelamente a la determinación de su grado de incertidumbre.
- Sin lugar a dudas, el uso de las ecuaciones diferenciales, facilita enormemente la interpretación económica de los problemas relacionados con la oferta y demanda, sobre todo la representación gráfica de las soluciones de las mismas. De hecho, proporciona un magnífico cuadro visual para determinar si en la situación planteada existe o no estabilidad de precio y el precio de equilibrio, si estos existen. Se insiste en el hecho de que cualquier resultado obtenido teóricamente, debe finalmente ser probado a la luz de la realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DERRICK / GROSSMAN (1984). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* México: Fondo Educativo Interamericano.

DOWLING, Edward (1999). *Matemáticas para Economistas.* México: McGraw-Hill.

GIORDANO / WEIR / FOX (2003). *A first course in mathematical modeling.* USA: Thomson.

EDWARDS / PENNEY (1993). *Ecuaciones diferenciales elementales.* México: PHH.

PEREZ-GRASA/ MINGUILLON/ JARNE (2001). *Matemáticas para Economía.* Madrid: McGraw Hill.

SPIEGEL, Murray (1989). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Madrid: PHI.

ZILL, Dennis (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* México: Thomson.