

**MODELACIÓN NACIONAL DE PORTAFOLIO EN TÍTULOS DE RENTA
VARIABLE, 2007-2009**

*Una aplicación no compleja del análisis técnico con base en herramientas cuantitativas y
el problema de Markowitz
(Primera Parte)*

Por: JULIO CÉSAR RIASCOS¹

“La ideología excluye la autocrítica mientras la ciencia es un movimiento esencialmente crítico”

Estanislao Zuleta

“Si tienes un minuto te diré cómo ganar dinero en el mercado bursátil.

Compra con precios bajos y vende con precios altos.

Si tienes 5 ó 10 años te diré cuándo los precios están bajos y cuándo están altos”

J.L. Livermore

RESUMEN

En el artículo se exponen los resultados del proceso de modelación de portafolio para cinco firmas que cotizan actualmente en la Bolsa de Valores de Colombia. Se examinan un total de 528 observaciones que corresponden al periodo comprendido entre el 28 de febrero de 2007 hasta el 28 de abril de 2009. En particular, el documento analiza la constitución de una cartera compuesta por los activos financieros de Bancolombia, la empresa de teléfonos de Bogotá, Interconexión Eléctrica S. A., Suramericana e Inversiones Argos. Con ese propósito, se explica la relevancia de la matriz de precios históricos, la matriz de rendimientos continuos, el estudio de indicadores o momentos estadísticos, los intervalos de volatilidad, la matriz de correlaciones y el examen de riesgo empresarial conjunto a partir de la matriz de varianzas-covarianzas.

Adicionalmente, se pretende determinar la volatilidad o riesgo del portafolio a la luz de la matriz de Harry Markowitz, que adyacente al cálculo del rendimiento conjunto obtenido a

¹ Economista Grado Honorífico, Egresado distinguido. Especialista en Finanzas Universidad de Nariño con estudios en econometría aplicada Universidad de Antioquia. Catedrático Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas Universidad de Nariño. Profesor Constructor de Preguntas para el Examen de Calidad en Educación Superior -ECAES- (Área Econometría) 2007-2008; ICFES-AFADECO. Investigador Coyuntura Social y Objetivos de Desarrollo del Milenio. E-mail: jriascos2009@hotmail.com

partir de la matriz de participaciones, permitirá aplicar instrumentos de programación lineal que posibiliten la optimización de la cartera de activos financieros. Finalmente, se aborda la aplicación de rudimentos básicos de econometría financiera con el objeto de viabilizar un análisis de riesgo sistémico y no sistémico soportado en la obtención de coeficientes de sensibilidad y bondad de ajuste.

Palabras clave: Rendimiento bursátil, riesgo microeconómico marginal, análisis de Markowitz, frontera de eficiencia, betas de sensibilidad, riesgo sistémico y no sistémico.

ABSTRACT

This document presents the results of the modeling portfolio to five companies listed on The Bolsa de Valores de Colombia (BVC). We examine a total of 528 observations between February 28 th 2007 through April 28 th 2009. In particular, the paper analyzes the formation of a portfolio composed of financial assets in Bancolombia, Compañía de Teléfonos de Bogotá, Interconexión Eléctrica S. A., Suramericana and Inversiones Argos. For this purpose, we explain the relevance of the matrix of historical prices, yields continuous matrix, the study of statistical indicators, intervals of volatility, the correlation matrix, Business risk and variance-covariance matrix.

Additionally, it is intended to determine the risk of the portfolio with the Harry Markowitz matrix, and the overall performance of the portfolio obtained from the participation matrix. With these elements, this study also presents an application of Linear Programming to find optimal portfolio of financial assets under alternative objective. Finally, the application of financial econometrics is usefully to facilitate the analysis of systemic risk and the analysis of sensibility

Keywords: stock performance, risk marginal, Markowitz theory, analysis of systemic risk, analysis of sensibility

INTRODUCCIÓN

La construcción de portafolios de inversión en títulos de renta variable constituye una de las tareas más importantes para un profesional en economía, administración, finanzas o áreas afines; no solamente porque integra una herramienta fundamental en la formación, sino porque además permite, la necesaria transición de los abstractos modelos teóricos al mundo de la práctica. Una de las ideas más interesantes de la macroeconomía moderna establece que las decisiones de inversión se basan en las condiciones de rentabilidad, seguridad-riesgo y liquidez. De modo que, por ejemplo, un proyecto de inversión no puede pasar por alto el cálculo de los rendimientos empresariales sin considerar los niveles de riesgo y liquidez. Generalmente y, eso lo advierte tanto la teoría como la evidencia empírica, los mayores niveles de rentabilidad implican mayores niveles de riesgo. Un inversionista, por lo tanto, debe tratar de maximizar su rentabilidad esperada tratando siempre de reducir los niveles de exposición al riesgo y lo anterior, la mayor parte de las veces, implica tomar decisiones de inversión en condiciones de incertidumbre.

A lo largo de estas páginas, el lector encontrará un estudio técnico bursátil aplicado a Bancolombia, empresa de teléfonos de Bogotá, interconexión eléctrica S. A., Suramericana e Inversiones Argos². En efecto, en el web site del Grupo Aval: <http://www.grupoaval.com/> es factible descargar la información de las jornadas diarias de cotización de 47 firmas con tan sólo acceder a los link's de "renta variable", "acciones Bolsa de Colombia" y "datos históricos". Allí, de forma aleatoria se determinaron las 5 entidades ya citadas y, se procedió a constituir la base de datos para cada una de ellas, soportada en los precios de cierre de 528 observaciones comprendidas entre el 28 de febrero de 2007 hasta el 28 de abril de 2009.

² El estudio de las plataformas bursátiles se determina a partir del denominado *análisis fundamental* que, se concentra en la dinámica productiva experimentada por los países, para aterrizar en la contribución de los sectores y subsectores económicos. Este tipo de investigación finaliza en el diagnóstico de las empresas apoyado, esencialmente, por recursos de micro-econometría y micro-finanzas. Por ejemplo, el análisis de árboles de rentabilidad empresarial puede asociarse a las dinámicas iterativas de juegos de Nash. El análisis técnico por su lado, estriba en la aplicación de herramientas matemáticas de programación, modelación econométrica y simulación estadística con el propósito de constituir herramientas cuantitativas que apoyen la toma de decisiones por parte del inversionista basado en la información generada por las jornadas diarias de cotización reproducidas en el mercado bursátil.

Adicionalmente, se descargaron y organizaron las fechas de forma ascendente para el Índice General de la Bolsa de Valores de Colombia (IGBC), como indicador del comportamiento ampliado del mercado bursátil³. Dada, la matriz de precios históricos que posibilita registrar el comportamiento asumido por una serie de empresas a partir de la evolución de sus cotizaciones en la bolsa se pretende, realizar un estudio de los rendimientos continuos por acción, construir la matriz de momentos estadísticos donde se establecerán los rendimientos medios por empresa en frecuencia diaria y anual, la volatilidad de dichos rendimientos para los mismos espacios de temporales y el análisis de riesgo marginal.

Una vez se hayan estudiado los momentos estadísticos se calcularán los máximos y mínimos rendimientos continuos para cada firma, así como para el indicador de mercado bursátil, teniendo en cuenta que estos intervalos de volatilidad se restringen a las clasificaciones de probabilidad de éxito o fracaso. Posteriormente, el artículo avanzará hacia la interpretación de la matriz de correlaciones señalando el problema de Markowitz y profundizando en el examen de riesgo conjunto a través de la evaluación de varianzas-covarianzas. Así mismo, se explicará el diseño de la matriz de participaciones y la trascendencia del juego de sumatorias internas y externas planteado por Harry Markowitz para encontrar la varianza y volatilidad del portafolio en su conjunto; y del mismo modo, se señala el cálculo de la rentabilidad conjunta. Finalmente se elabora la parametrización matemática aplicando las herramientas de programación de **Solver** con el objetivo de construir la frontera de eficiencia y optimización de la cartera de instrumentos financieros. El trabajo termina con una aplicación econométrica a nivel financiero sobre el Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital (**MPAC**), lo anterior, con la intención de establecer sensibilidades y composición de riesgo sistémico y no sistémico.

PRECIOS HISTÓRICOS

³ Aunque existen dos indicadores de mercado accionario adicionales, COLCAP que constituye el Índice de valorización de las 20 acciones más líquidas de la bolsa y COL20 que monitorea la evolución de las 20 acciones más líquidas del mercado, no se tuvieron en cuenta en la elaboración de este estudio, dado que ambos elementos registran información desde el 6 y 14 de enero de 2008 respectivamente y, no cubrían el periodo de análisis que iniciaba mucho antes, el 28 de febrero de 2007.

La matriz de precios históricos reúne la información sobre los precios de cierre de cada jornada diaria de cotización, se incluye además de los activos financieros, el IGBC dado que éste captura el comportamiento del mercado bursátil en su conjunto. En el cuadro 1 puede apreciarse un segmento de la matriz en donde se han organizado todos los datos de acuerdo con sus fechas de forma ascendente. Dada su extensión de 528 observaciones, no se plantea aquí, la totalidad de los datos; sin embargo, el gráfico 1 permite monitorear la evolución de cada activo financiero que, conforma el portafolio de inversión durante el periodo de análisis. En particular, son este tipo de diseños los que permiten una primera exploración al análisis técnico, teniendo en cuenta los diferentes patrones: Hombro-Cabeza-Hombro (HCH), Hombro-Cabeza-Hombro Invertido (HCHI), Vectores Triangulares (TRI) o Vectores Triangulares Invertidos (TRII)⁴. No obstante, el análisis cuantitativo permite aterrizar con mayor grado de certeza este tipo de estudio.

CUADRO 1: MATRIZ DE PRECIOS HISTÓRICOS

FECHA	IGBC	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
28/02/2007	10.113,11	15.200,00	622	5.600,00	18.480,00	10.900,00
01/03/2007	10.146,33	15.300,00	631	5.600,00	18.500,00	11.000,00
02/03/2007	10.193,00	15.440,00	625	5.660,00	18.560,00	11.000,00
05/03/2007	10.052,00	14.860,00	610	5.480,00	18.200,00	10.800,00
06/03/2007	10.125,85	14.920,00	602	5.480,00	18.300,00	10.800,00
07/03/2007	10.185,25	15.000,00	606	5.610,00	18.240,00	10.800,00
08/03/2007	10.399,45	15.520,00	619	5.710,00	18.660,00	11.220,00
09/03/2007	10.423,71	15.500,00	620	5.830,00	18.660,00	11.340,00
12/03/2007	10.418,00	15.500,00	618	5.800,00	18.540,00	11.400,00
13/03/2007	10.307,31	15.300,00	610	5.750,00	18.300,00	11.360,00
14/03/2007	10.199,02	15.100,00	610	5.670,00	18.100,00	11.160,00
15/03/2007	10.279,36	15.180,00	613	5.630,00	18.180,00	11.260,00
16/03/2007	10.397,41	14.980,00	620	5.700,00	18.180,00	11.300,00
20/03/2007	10.734,24	15.000,00	680	5.760,00	18.480,00	11.440,00
21/03/2007	10.921,54	14.900,00	652	5.740,00	18.520,00	11.600,00
22/03/2007	10.756,33	14.960,00	640	5.820,00	18.480,00	11.420,00
23/03/2007	10.893,93	15.100,00	660	6.010,00	18.660,00	11.680,00
26/03/2007	10.894,70	15.040,00	654	6.030,00	18.640,00	11.660,00
27/03/2007	11.042,82	15.400,00	654	6.090,00	18.880,00	11.780,00
28/03/2007	10.917,24	15.120,00	651	6.000,00	18.560,00	11.520,00

⁴ **BASAGOITI**, Rosa. Redefinición de patrones de análisis técnico para operaciones intra-día. En: **FERRER-TROYANO**, Francisco J; **TRONCOSO**, Alicia y **RIQUELME**, José C. (Editores) Quinto Taller de Minería de Datos y Aprendizaje (TAMIDA '07). Editorial Thomson. España, 2007. Pág. 232. Disponible en: <http://www.lsi.us.es/redmidas/CEDI07/%5B24%5D.pdf>. Consultado en mayo 4 de 2009.

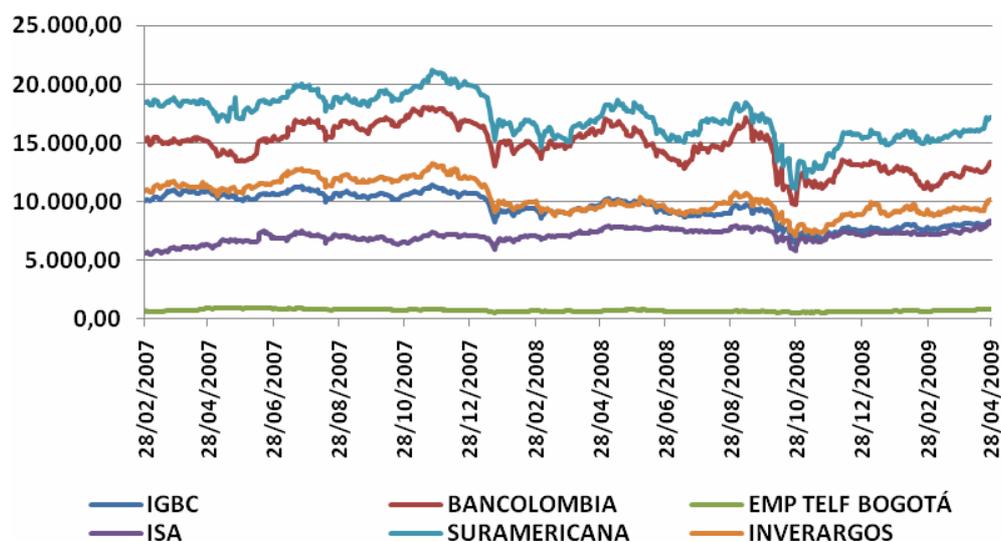
29/03/2007	10.800,93	15.100,00	642	5.960,00	18.560,00	11.440,00
30/03/2007	10.686,38	15.000,00	639	6.000,00	18.400,00	11.380,00

FUENTE: Construida por J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

No se pierda de vista que esta cobertura temporal es particularmente interesante por la evolución de la crisis financiera internacional originada en los problemas de liquidez, la desvalorización de bienes inmuebles, y la crisis de las hipotecas sub-prime. En Colombia, los efectos más agudos de la dinámica internacional se evidenciaron el lunes 27 de Octubre de 2008 cuando el precio de cotización del IGBC se desplomó hasta las 6.460,85 unidades. Ahora bien, si el IGBC constituye el indicador de mercado, entonces simplemente refleja lo que sucede a nivel agregado en los activos financieros que lo componen, no es de extrañarse, por lo tanto, que la cotización de Bancolombia haya sido en esa misma fecha la más baja 9.730 puntos, igual que la Empresa de teléfonos de Bogotá que llegó a un piso de 470 puntos y de Suramericana que tocaría fondo en los 11.100 puntos. En otras palabras, tres de las cuatro firmas alcanzaron en el mismo día la cotización más reducida en la bolsa de valores. Isa se ubicó en esa fecha en los 5.750 puntos, la onceava caída más notable que ha experimentado en todo el periodo⁵.

GRÁFICA 1: EVOLUCIÓN DE LOS PRECIOS DE CIERRE DE LOS INSTRUMENTOS FINANCIEROS Y DEL IGBC

⁵ ISA evidenció la mayor caída en Marzo 6 de 2007 cuando llegó a las 5.480 unidades.



FUENTE: Construida por J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

El problema de llevar a cabo un análisis técnico basado únicamente en el componente gráfico de la matriz de precios históricos, estriba en que, al final, no se elabora un estudio que vaya más allá de un diagnóstico intuitivo del comportamiento de los activos financieros; además, la información suscitada en los precios históricos poco o nada dice sobre el rendimiento accionario que, es en última instancia aquello que interesa al inversionista. Dados estos elementos, es necesario efectuar un examen un poco más profundo del comportamiento de los diferentes instrumentos sobre su capacidad de rendimiento en el tiempo, por lo que, en consecuencia, se utiliza la matriz de rendimientos continuos.

RENDIMIENTOS CONTINUOS

La matriz de rendimientos se obtiene a partir de las variaciones continuas. Lo anterior porque el precio de las acciones constituye en esencia, una variable aleatoria continua⁶, la

⁶ En este sentido, la distribución normal se asocia a una variable aleatoria continua donde:

$$Y = \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right] e^{-Z^2/2\sigma^2}$$

característica fundamental de este tipo de elementos estriba en que se cuenta con un dato inicial, pero no necesariamente con una cifra final. En términos simples, se estaría haciendo alusión a una variable infinita y, en ese caso, sus variaciones porcentuales se expresan en términos logarítmicos y, dado que se trabaja con precios y, estos mismos no pueden ser negativos, los rendimientos se calculan considerando esta metodología⁷.

El cuadro 2 posibilita determinar un pequeño fragmento de la matriz de rendimientos continuos, en particular el periodo comprendido entre el jueves 3 de marzo de 2007 hasta el viernes 30 del mismo mes. Dada la extensión de la matriz, los gráficos 3, 4, 5 y 6 recogen la evolución completa de los rendimientos diarios de cotización de cada una de las firmas de estudio.

CUADRO 2: MATRIZ DE RENDIMIENTOS CONTINUOS

FECHA	IGBC	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
01/03/2007	0,33%	0,66%	1,44%	0,00%	0,11%	0,91%
02/03/2007	0,46%	0,91%	-0,96%	1,07%	0,32%	0,00%
05/03/2007	-1,39%	-3,83%	-2,43%	-3,23%	-1,96%	-1,83%
06/03/2007	0,73%	0,40%	-1,32%	0,00%	0,55%	0,00%
07/03/2007	0,58%	0,53%	0,66%	2,34%	-0,33%	0,00%
08/03/2007	2,08%	3,41%	2,12%	1,77%	2,28%	3,82%
09/03/2007	0,23%	-0,13%	0,16%	2,08%	0,00%	1,06%
12/03/2007	-0,05%	0,00%	-0,32%	-0,52%	-0,65%	0,53%
13/03/2007	-1,07%	-1,30%	-1,30%	-0,87%	-1,30%	-0,35%
14/03/2007	-1,06%	-1,32%	0,00%	-1,40%	-1,10%	-1,78%
15/03/2007	0,78%	0,53%	0,49%	-0,71%	0,44%	0,89%
16/03/2007	1,14%	-1,33%	1,14%	1,24%	0,00%	0,35%
20/03/2007	3,19%	0,13%	9,24%	1,05%	1,64%	1,23%
21/03/2007	1,73%	-0,67%	-4,20%	-0,35%	0,22%	1,39%
22/03/2007	-1,52%	0,40%	-1,86%	1,38%	-0,22%	-1,56%
23/03/2007	1,27%	0,93%	3,08%	3,21%	0,97%	2,25%
26/03/2007	0,01%	-0,40%	-0,91%	0,33%	-0,11%	-0,17%
27/03/2007	1,35%	2,37%	0,00%	0,99%	1,28%	1,02%
28/03/2007	-1,14%	-1,83%	-0,46%	-1,49%	-1,71%	-2,23%
29/03/2007	-1,07%	-0,13%	-1,39%	-0,67%	0,00%	-0,70%
30/03/2007	-1,07%	-0,66%	-0,47%	0,67%	-0,87%	-0,53%

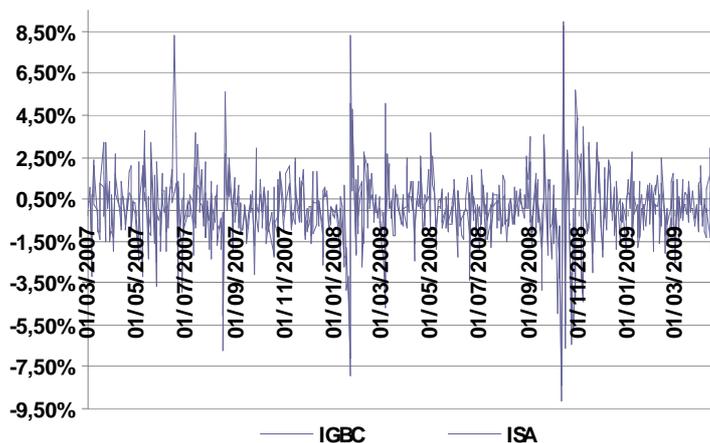
N= Número de datos, σ = desviación estándar de la distribución binomial, e= Base de logaritmo natural, $\Pi=3.1416$, Z^2 = Normal estandarizada.

⁷ Mientras que la clásica variación discreta se obtiene a partir de la expresión $[(\text{Valor futuro}/\text{Valor presente})-1]*100$, las variaciones continuas se calculan como $\text{Ln}[(\text{Valor futuro}/\text{Valor presente})]*100$.

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

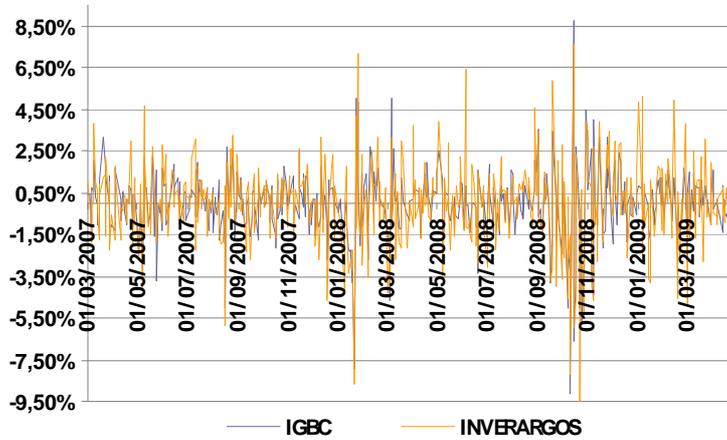
La matriz de rendimientos continuos indica qué tanto se ha valorizado o desvalorizado el comportamiento de las empresas en el mercado e incluso el comportamiento del mercado como tal. Por ejemplo, del 1al 2 de Marzo de 2007, el mercado bursátil se valorizó en 0.46%; para la misma fecha, las acciones de Bancolombia, ISA y Suramericana tuvieron una valorización del 0.91%, 1.07% y 0.32% mientras que, la empresa de teléfonos de Bogotá se desvalorizó en 0.96% e, Inversiones Argos no tuvo rendimientos durante el transcurso de esa jornada.

GRÁFICA 2: EVOLUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS DE ISA Y DEL IGBC



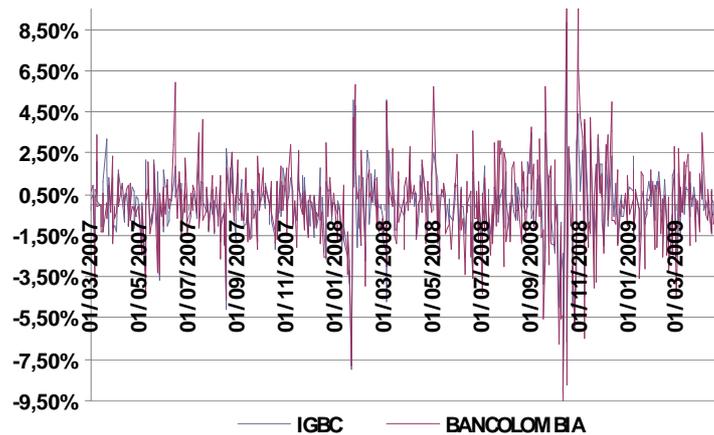
FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

GRÁFICA 3: EVOLUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS DE INVERARGOS Y DEL IGBC



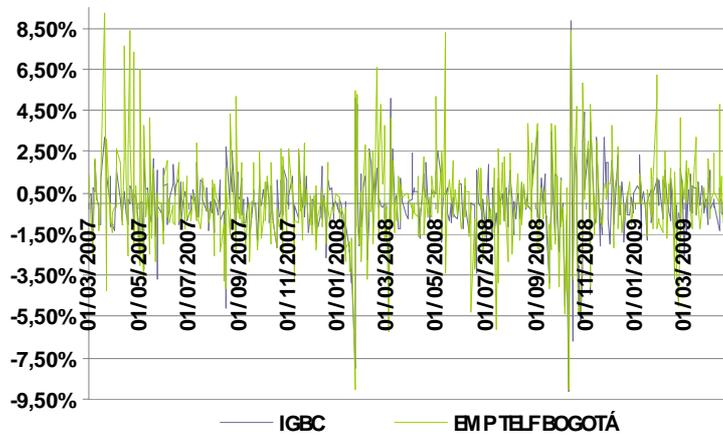
FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

GRÁFICA 4: EVOLUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS DE BANCOLOMBIA Y DEL IGBC



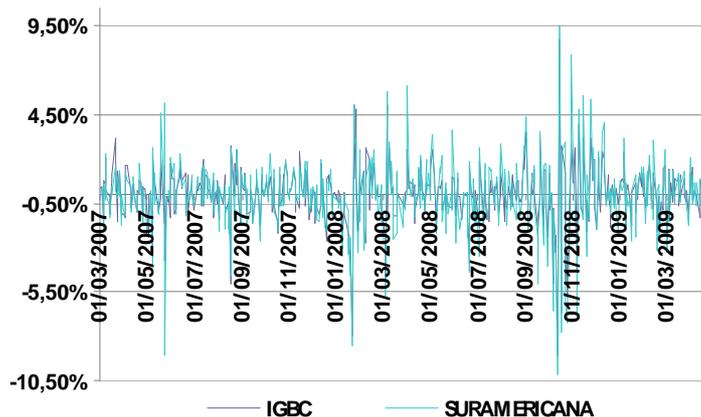
FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

GRÁFICA 5: EVOLUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS DE LA EMPRESA DE TELÉFONOS DE BOGOTÁ Y DEL IGBC



FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

GRÁFICA 6: EVOLUCIÓN DE LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS DE SURAMERICANA Y DEL IGBC



FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

INDICADORES O MOMENTOS ESTADÍSTICOS

La matriz de indicadores o momentos estadísticos se constituye en una importante herramienta de valoración empresarial a nivel accionario. En ella se dan cita los rendimientos medios de cada firma $E(R_i)$, incluyendo también los rendimientos medios del mercado. Dentro del periodo de análisis, es posible advertir que el mercado se desvalorizó en promedio 0.04% por jornada diaria de cotización, lo mismo sucedió con Bancolombia (-0.02%), Suramericana (-0.01%) e Inverargos (-0.01%). Por el contrario, Isa asistió al mayor rendimiento continuo medio en la misma frecuencia 0.07% junto con la empresa de teléfonos de Bogotá 0.05%.

Los rendimientos de las firmas en Colombia en términos generales, experimentaron declives pronunciados por los coletazos de la crisis financiera y real de la economía de Estados Unidos, para no ir más lejos, los rendimientos continuos del Dow Jones industrial, indicador que compila la evolución de las 30 empresas líderes de los Estados Unidos, durante exactamente el mismo periodo de análisis se desvalorizaron en promedio por jornada diaria de cotización 0.08%⁸.

CUADRO 3: MATRIZ DE INDICADORES O MOMENTOS ESTADÍSTICOS

MOMENTOS	IGBC	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
E (R_i)	-0,04%	-0,02%	0,05%	0,07%	-0,01%	-0,01%
E (R_{ip})	-9,33%	-5,92%	14,12%	19,65%	-3,32%	-3,03%
Vol (R_i)	1,56%	2,07%	2,18%	1,68%	1,99%	1,92%
Vol (R_{ip})	24,81%	32,87%	34,56%	26,74%	31,65%	30,50%
Var (R_i)	0,02%	0,04%	0,05%	0,03%	0,04%	0,04%
Rm (R_i)	40,22	85,57	41,52	23,66	148,77	157,21

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

El concepto de media de rendimientos continuos puede analizarse a la luz de su frecuencia anual $E(R_{ip})$. Lo anterior se viabiliza mediante la siguiente expresión:

⁸ Un análisis ANOVA efectuado por el autor para la misma cobertura temporal de esta investigación, determinó que por cada 1% en que se reduce el DOW JONES, el IGBC desciende en 0.32%

$$E(R_{ip}) = \{[1 + E(R_i)]^{252}\} - 1 \quad (1)$$

Donde $E(R_{ip})$ conforma los rendimientos continuos medios anualizados del activo financiero de estudio, $E(R_i)$ se refiere a los rendimientos continuos por ronda diaria de negociación, y el exponente 252 constituye el número de días del año bursátil. De ese modo, la desvalorización anual del mercado a partir del IGBC habría sido del 9.33%, la misma situación habrían de experimentar Bancolombia (-5.92%), Suramericana (-3.32%) e Iverargos (-3.03%); entre tanto, Isa y la empresa de teléfonos de Bogotá habrían de considerar rendimientos anuales positivos del orden del 19.65 y 14.2% correspondientemente. Es particularmente sensible el deterioro de los rendimientos del mercado bursátil en Colombia, sobre todo cuando por citar un ejemplo, entre Diciembre 11 de 2004 y Diciembre 10 de 2007 ese rendimiento era positivo y cercano al 40% ⁹.

La volatilidad¹⁰, también conocida como desviación estándar o error típico (σ), constituye un elemento estadístico expresado como la raíz cuadrada de la varianza, entendida ésta

⁹ Dada esta dinámica suscitada alrededor del mercado bursátil, el Banco de la República ha determinado disminuciones sistemáticas en los tipos de interés de referencia (del 7% al 6%, lo que implica un descenso de 100 puntos básicos), uno de los propósitos de la medida descansa en alentar los niveles de inversión y en consecuencia, la valoración de los activos financieros. En ese orden de ideas, debe tenerse en cuenta la interconexión existente entre el *mercado de dinero* donde se define el tipo de interés y, el *mercado de bonos o acciones* donde se define el precio de los papeles, ambos elementos ejes integrales del denominado mercado de capitales, la teoría macroeconómica supone que dentro del mismo, $(L+V) = (M/P+V^s)$ donde L constituye la demanda de dinero, M/P la oferta monetaria real, V la demanda de bonos y V^s la oferta de bonos. La idea central que gira en torno al equilibrio del mercado de capitales estriba en que conociendo el comportamiento de uno de los mercados es posible inferir la conducta del otro. Además de concebir el equilibrio del mercado de capitales como el equilibrio conjunto de ambos mercados, pero también con la capacidad simultánea de neutralizar desequilibrios entre sí: $(L-M/P) + (V-V^s)=0$; $(L>M/P) + (V<V^s)=0$; $(L<M/P) + (V>V^s)=0$.

¹⁰ Para calcular la volatilidad o nivel de riesgo, debe determinarse si la variable es discreta o continua, adicionalmente debe considerarse el tipo de serie que, puede definirse como muestral (cuando el tamaño de los datos no supera 30 Observaciones) o poblacional y, finalmente el tipo de distribución que se clasifica en normal (caracterizada porque su media tiende a cero y su varianza a σ^2), log normal (caracterizada porque en el análisis de los datos se hace efectivo con variables positivas, un ejemplo típico estriba en el precio de las acciones que se cotizan en la bolsa, dado que ellos siempre son positivos) y t de student (en general, esta distribución permite efectuar el análisis de prueba de hipótesis para medias independientes).

como una medida estadística que cuantifica la dispersión de los datos alrededor de su media aritmética ($\sqrt{\sigma^2}$). En términos financieros, posibilita un buen indicador de riesgo, tanto es así, que mediante unos ajustes, se obtiene a partir de este valor, el índice de volatilidad empresarial, fundamental en la evaluación de proyectos.

En esta investigación, se considera a la desviación típica como un factor de riesgo asociado a cada alternativa de inversión, incluso es posible determinar la volatilidad de todo el mercado bursátil a partir de los rendimientos continuos del IGBC.

Así por ejemplo, la volatilidad del mercado, por jornada diaria de cotización durante el periodo comprendido entre Marzo 1 de 2007 y abril 28 de 2009 se ubicó por ronda diaria de negociación en el 1.56%, cabe resaltar que, dentro del portafolio de inversión que aquí se está evaluando, todas las firmas registraron indicadores de riesgo bursátil por encima del determinado por el mercado, siendo la Empresa de Teléfonos de Bogotá el activo que registró mayor riesgo, ubicándose en 2.18%, seguido por Bancolombia (2.07%), Suramericana (1.99%), Inverargos (1.92%) e Isa que con el 1.68% se constituirá en la empresa con mayor estabilidad en términos de reproducción de rendimientos continuos. *Nótese a la luz de estos indicadores que Isa constituye el activo con mayor nivel de rendimiento accionario y menor volatilidad¹¹.*

El riesgo anual se basa en el cálculo de la volatilidad individual de frecuencia diaria, efectuada a través de la desviación estándar tipificada multiplicada por la raíz cuadrada de los días comprendidos en un año bursátil, tal y como se plantea a continuación:

¹¹ El análisis del riesgo es fundamental cuando se desea establecer una inversión; de hecho la literatura microeconómica basada en la toma de decisiones en condiciones de riesgo e incertidumbre señala la existencia de tres tipos de inversionistas, unos que son indiferentes al nivel de riesgo existente, así que para ellos independientemente del nivel de riesgo que se asocie a una inversión pueden invertir o dejar de hacerlo, otros que se denominan como adversos al riesgo que, aún cuando la rentabilidad de la inversión es muy alta y los riesgos muy reducidos, se abstienen de efectuar cualquier tipo de inversión dado que prefieren retener sus recursos a la posibilidad de arriesgarse aún cuando las condiciones sean muy atractivas para hacerlo y, finalmente aquellos que son amantes al riesgo, que son quienes sin importar que los niveles de riesgo sean demasiado elevados invierten por el placer que esto les proporciona.

$$\text{Vol(Rip)} = \text{Vol(Ri)} * \sqrt{252} \quad (2)$$

Donde Vol(Rip) constituye la desviación estándar tipificada de frecuencia anual, Vol(Ri) conforma el riesgo individual de la firma de análisis y 252 corresponde al número de días que comprende el año bursátil. Considerando la cobertura temporal del estudio, el nivel de riesgo anualizado del mercado fue de 24.81%, así mismo, la Empresa Telefónica de Bogotá se constituyó en el activo empresarial de mayor riesgo en el portafolio con un 34.56%, seguida de Bancolombia con el 32.87%, Suramericana con el 31.65%, Inverargos con el 30.5% y finalmente Isa con un nivel de volatilidad del 26.74%, constituyéndose en la firma de menor riesgo y mayor rendimiento expresados en frecuencia anual.

A partir de la información obtenida por la desviación típica individual de los instrumentos financieros, es posible obtener la varianza de los rendimientos continuos de las firmas, lo que supone una aproximación al riesgo. La varianza, como una de las más importantes medidas de dispersión, es simplemente el cuadrado de la desviación estándar, y si ésta última era capaz de informar sobre el error típico en términos estadísticos, o del riesgo o volatilidad de las empresas en términos financieros, la varianza suministra información relevante sobre la confiabilidad existente en el intervalo de rendimientos que comprende cada firma. En general esta información debe ser consecuente con la obtenida por la desviación estándar.

El riesgo marginal constituye el último momento estadístico de la matriz de indicadores; como coeficiente de variación permite definir la decisión de riesgo o seguridad, sobre todo cuando entre las volatilidades no existe una diferencia apreciable o sustancial, en otras palabras, establecer qué instrumento es más o menos riesgoso constituye una tarea concreta de la marginalidad más que de la volatilidad. Lo ideal es que el riesgo marginal, siendo un indicador de seguridad reafirme los resultados obtenidos en el cálculo de la volatilidad, pero también es cierto que puede cambiar la decisión basada en la desviación estándar. El *riesgo marginal* como concepto, constituye un aporte neoclásico de la teoría

microeconómica, en específico de la *corriente marginalista*¹²; supone que por cada variación en el valor medio de los rendimientos promedios se genera un impacto sobre el riesgo adicional o marginal. El riesgo marginal [Rm] se cuantifica como un valor absoluto del cociente entre la volatilidad periódica y el valor promedio de los rendimientos históricos:

$$R_m = | \text{Vol}(R_i) / E(R_i) | \quad (3)$$

Según el coeficiente de riesgo marginal del mercado bursátil colombiano, el indicador para el periodo de análisis se estima en el 40.22%, lo que sugiere que, por un incremento del 1% en el rendimiento esperado, el riesgo base se amplifica en 40.22 unidades porcentuales. El riesgo marginal más elevado lo experimentó Inverargos con un 157.21%, seguido por Suramericana con el 148.77%, Bancolombia en el 85.57% y, con niveles de exposición marginal más reducidos aparecerían la empresa de teléfonos de Bogotá (41.52%) e Isa con el 23.66%, el lector notará nuevamente que, Isa presenta los resultados más favorables.

Intervalos de volatilidad para los rendimientos individuales de las empresas

Los intervalos de volatilidad para los rendimientos de un instrumento financiero se definen como los rangos de oscilación entre los cuales se determina un techo y un piso, de manera que sobre los mismos sean posibles las variaciones de la rentabilidad. Para elaborar las *franjitas estáticas* deben considerarse tres criterios a la luz de su probabilidad de éxito o fracaso, en el cuadro 4 se representan los resultados del modelado estadístico.

Para cada uno de los activos financieros se ha establecido un nivel máximo y mínimo a través de los cuales se supone, deben oscilar los niveles de rendimiento, dado un nivel de

¹² **Becker** y **Stigler** (1977) y más tarde, **Becker** y **Murphy** (1988) ofrecieron una muy interesante teoría alterna a la corriente marginalista; en ella por ejemplo, se planteaba la relevancia de elementos como la utilidad marginal, productividad marginal, costo marginal, etc.; Becker, Stigler y Murphy incorporaron un modelo antónimo de la marginalidad cuando expusieron el caso de eventos en donde la utilidad del consumo ofrecía cada vez mayor satisfacción, la denominada **teoría de los hábitos y la adicción** suponía que algunos bienes tienen la facultad de consumirse con mayor frecuencia y cantidad que la unidad inmediatamente anterior, porque su utilidad era cada vez más alta o adictiva. Ver **NICHOLSON**, Walter. Teoría Microeconómica: Principios y Aplicaciones. Sexta Edición. Mc Graw Hill. Madrid, 1997. Pág. 66.

probabilidad estadística; por ejemplo, en el caso de Bancolombia, los rendimientos fluctuarán hasta un techo delimitado en el 2.05%, en contraste, el patrón de cambios puede experimentar pisos hasta el -2.10%; lo anterior, con una probabilidad de acierto del 68%. En ese orden de ideas, si se tratara de aumentar la probabilidad de éxito, el criterio comienza a duplicar la proporción de volatilidad individual, así las cosas, con una probabilidad del 98%, para el mismo activo empresarial, las oscilaciones de los rendimientos continuos tendrían un techo de 4.12% y un piso de -4.2%. Finalmente, con una probabilidad de ocurrencia del 99.7%, el piso de los rendimientos continuos de Bancolombia descansaría en 6.19% y un techo en -6.2%. Como es posible advertir, en la medida que se incrementa la probabilidad de ocurrencia, se expande también la franja de variación; entre más pequeño el intervalo de volatilidad más alta es la probabilidad de fracaso.

CUADRO 4: RANGOS DE OSCILACIÓN PARA LOS RENDIMIENTOS CONTINUOS

BANCOLOMBIA	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	2,05%	-2,10%	68%	32%
$E(R_i) \pm 2Vol(R_i)$	4,12%	-4,20%	98%	2%
$E(R_i) \pm 3Vol(R_i)$	6,19%	-6,20%	99,70%	0,30%
EMPRESA TELEFÓNICA DE BOGOTÁ	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	2,23%	-2,12%	68%	32%
$E(R_i) \pm 2Vol(R_i)$	4,41%	-4,30%	98%	2%
$E(R_i) \pm 3Vol(R_i)$	6,58%	-6,48%	99,70%	0,30%
INTERCONEXIÓN ELÉCTRICA S.A.	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	1,76%	-1,61%	68%	32%
$E(R_i) \pm 2Vol(R_i)$	3,44%	-3,30%	98%	2%
$E(R_i) \pm 3Vol(R_i)$	5,13%	-4,98%	99,70%	0,30%
SURAMERICANA	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	1,98%	-2,01%	68%	32%
$E(R_i) \pm 2Vol(R_i)$	3,97%	-4,00%	98%	2%
$E(R_i) \pm 3Vol(R_i)$	5,97%	-5,99%	99,70%	0,30%
INVERARGOS	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	1,91%	-1,93%	68%	32%
$E(R_i) \pm 2Vol(R_i)$	3,83%	-3,86%	98%	2%
$E(R_i) \pm 3Vol(R_i)$	5,75%	-5,78%	99,70%	0,30%
IGBC	MÁX	MÍN	PROB ACIERTO	PROB FRACASO
$E(R_i) \pm Vol(R_i)$	1,52%	-1,60%	68%	32%

E(Ri)±2Vol(Ri)	3,09%	-3,16%	98%	2%
E(Ri)±3Vol(Ri)	4,65%	-4,73%	99,70%	0,30%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

El IGBC presentó las franjas que con mayor probabilidad de ocurrencia 99.7% resultaron ser aquellas de intervalos más pequeños en comparación con los demás activos financieros (-4.73% y 4.65%), seguida de Isa (-4.98% y 5.13%), Inverargos (-5.78% y 5.75%), Suramericana (-5.99% y 5.97%) y con intervalos mayores, Bancolombia (-6.2% y 6.19%) y por último, la empresa telefónica de Bogotá con un intervalo entre (-6.48% y 6.58%). Lo anterior es consecuente con los resultados de volatilidad trabajados en la matriz de indicadores o momentos estadísticos y en consecuencia, refuerza las mismas tesis en términos de probabilidad.

MATRIZ DE CORRELACIONES Y VARIANZAS-COVARIANZAS

El coeficiente de correlación permite identificar el grado de asociación lineal existente entre dos variables, en este caso, la matriz de correlaciones permitirá determinar la afinidad presentada por los rendimientos continuos de las diferentes firmas de manera simultánea.

CUADRO 5: MATRIZ DE CORRELACIONES¹³

	IGBC	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
IGBC	100,00%					
BANCOLOMBIA	81,85%	100,00%				
EMP TELF BOGOTÁ	61,20%	46,19%	100,00%			
ISA	74,63%	60,36%	47,38%	100,00%		
SURAMERICANA	89,27%	79,95%	54,44%	67,49%	100,00%	
INVERARGOS	80,53%	66,81%	50,40%	63,11%	76,12%	100,00%

¹³ Tanto en el diseño de correlaciones como el cálculo de las varianzas-covarianzas, la plataforma de Excel o Gretl 1.0.1. emite los valores únicamente en la parte inferior de la matriz, dado que como constituye un elemento simétrico, se infiere el valor ha reproducirse en el área superior. E-views es un programa econométrico que proporciona estos valores sin importar su repetición.

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

El proceso de modelación financiera efectuado a partir de la matriz de correlaciones posibilita establecer el grado de diversificación que admiten las empresas dentro del portafolio de inversión, de ese modo, las correlaciones cercanas a 0 posibilitan invertir en un determinado instrumento financiero sin comprometer sus rendimientos continuos con aquellos asociados a otra opción. Tal y como se puede percibir en el cuadro 5, el problema de este portafolio particular estriba en que las correlaciones son en general, demasiado elevadas y positivas, lo que implica que, por ejemplo, los rendimientos continuos de Bancolombia estarían relacionados a Suramericana o, viceversa, en un 79, 95%. Lo anterior implicaría que, no es posible diversificar los rendimientos accionarios y, en consecuencia, los rendimientos de una firma están supeditados al comportamiento de otro activo empresarial, y aunque eso podría ser favorable en épocas de auge, constituye una elevada exposición en circunstancias adversas. En este caso en particular, la alta correlación existente supone que cuando un instrumento presenta una reducción en los rendimientos continuos, los canales de transmisión financiera afectan a las demás firmas y, por lo tanto, a todo el portafolio en su conjunto. Dados estos elementos, un inversionista debe, en lo posible, tratar de diversificar sus recursos en activos empresariales de diferentes sectores¹⁴.

La matriz permite identificar, además de lo que ya se ha planteado, la existencia de elevadas correlaciones entre los rendimientos del mercado y los activos empresariales. La idea de que el comportamiento del mercado es explicada por la dinámica conjunta de las firmas es evidente, no obstante; si lo que se suscita entre las firmas es su alta dependencia a los cambios del mercado, eso mismo supone un alto grado de exposición, tal y como se verá más adelante, en el análisis ANOVA, las firmas deben propender por generar comportamientos en sí mismas y no, como consecuencia del comportamiento del mercado.

¹⁴ De ese modo, los accionistas pretenderán en el peor de los casos, que los rendimientos positivos generados por un conjunto de firmas neutralice las pérdidas acaecidas en otros activos que a su vez conformen todo el portafolio. Esto mismo sugiere, la posibilidad de que los empresarios se cubran en juegos de suma cero.

Dados estos elementos, la matriz de correlaciones permite visualizar el grado de diversificación, sin embargo, no constituye un elemento concluyente de la causalidad existente entre las variables.¹⁵

Dentro de esa misma línea de análisis, es relevante implementar un examen sobre la volatilidad simultánea en los rendimientos continuos, más aún cuando ellos mismos conforman inversiones paralelas dentro de un mismo portafolio. En efecto, la matriz de varianzas-covarianzas, permite llevar a cabo un estudio sobre el nivel de riesgo conjunto de los rendimientos continuos que se han considerado dentro de la cesta de instrumentos financieros. La covarianza de los rendimientos X y Y determinados de manera conjunta se expresa como:

$$\text{Cov}(R_x, R_y) = \sum_{i=1}^n P_i * [(R_x - ER_x) * (R_y - ER_y)] \quad (4)$$

CUADRO 6: MATRIZ DE VARIANZAS-COVARIANZAS

	IGBC	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
IGBC	0,02%					
BANCOLOMBIA	0,03%	0,04%				
EMP TELF BOGOTÁ	0,02%	0,02%	0,05%			
ISA	0,02%	0,02%	0,02%	0,03%		
SURAMERICANA	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,04%	
INVERARGOS	0,02%	0,03%	0,02%	0,02%	0,03%	0,04%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

El cuadro 6 le permite al lector hacerse a una idea sobre la volatilidad asociada a la inversión de dos activos empresariales de forma simultánea, El riesgo conjunto de dos opciones es, a la luz de este análisis reducido, ya que la volatilidad más elevada es aquella que descansa entre Bancolombia y Suramericana 0.04% y Bancolombia e Inverargos 0.04%. La diagonal de la matriz conforma la covarianza de los instrumentos consigo

¹⁵ De allí la importancia de la prueba de causalidad de Granger.

mismos y en consecuencia, esa relación es equivalente a la varianza, tal y como se puede corroborar si se compara con los resultados obtenidos en la matriz de indicadores o momentos estadísticos (*Cuadro 3, quinto elemento*).

MATRIZ DE PARTICIPACIONES

La matriz de participaciones compila el porcentaje de inversión inicial que el accionista estaría dispuesto a depositar en cada una de las firmas que conforman el portafolio. La sumatoria de tal distribución de recursos debe conducir a la obtención del 100%. Los criterios siguen siendo la rentabilidad, la seguridad y la liquidez.

CUADRO 7: MATRIZ INICIAL DE PARTICIPACIONES

EMPRESA	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS	TOTAL
PORCENTAJE	10%	35%	35%	10%	10%	100%

En la construcción de esta matriz el inversionista generalmente trabaja de forma intuitiva, sin embargo, un buen análisis cualitativo de los fundamentales macroeconómicos, el comportamiento sectorial, los registros financieros y un examen microeconómico de las firmas, deberían conducirlo a resultados similares al que se obtendría después de elaborarse un análisis técnico; en realidad, ambos estudios constituyen un complemento y, posibilitan elementos de juicio idóneos para respaldar la toma de decisiones. Ahora bien, en el cuadro 7 se han establecido los porcentajes correspondientes a cada activo financiero dentro de la estructura del portafolio. El inversionista en este caso habría de considerar como importantes las participaciones de la empresa de teléfonos de Bogotá e Isa; sin embargo, es posible que necesite de la asesoría del economista o del administrador para saber a priori, qué tan buena es su elección. Por lo anterior, es necesario entonces, aplicar una herramienta cuantitativa de optimización de portafolios, lo que efectivamente es posible en el proceso de parametrización y programación lineal propuesto por Harry Markowitz economista premio nobel 1990.

EL MODELO DE MARKOWITZ: TEORÍA MODERNA DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS

Cuando un inversionista decide colocar sus recursos en una cesta de activos financieros, como si de una iso-cuanta se tratase, pretenderá, a sabiendas que las actividades más rentables son por lo general aquellas con mayor nivel de riesgo, optimizar su decisión, implicando eso mismo que busque ajustar un bajo nivel de exposición con el máximo de rentabilidad continua del portafolio. Este proceso, condicionado a la diversificación de la volatilidad, o lo que se asociaría a maximizar el agregado de rentabilidad continua de la cartera de activos empresariales, minimizando el riesgo total del portafolio implicaría ajustar la participación porcentual de cada instrumento con ese mismo propósito. En efecto, el modelo de optimización de cartera de activos financieros propuesta por Harry Markowitz permite al analista bursátil precisar el monto exacto de inversión que debe ejecutarse en cada firma.

La matriz se compone de dos sumatorias, la primera que constituye una sumatoria interna replica tantas veces como sea necesario, cada una de las firmas de tal forma que, pueda interceptarse en la segunda sumatoria por las firmas que integran el portafolio. Lo anterior puede observarse en el cuadro 8.

CUADRO 8: MATRIZ INICIAL DE MARKOWITZ

SUMATORIA INTERNA	SUMATORIA EXTERNA	P%*P%*Cov
BANCOLOMBIA	BANCOLOMBIA	0,00%
BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	0,00%
BANCOLOMBIA	ISA	0,00%
BANCOLOMBIA	SURAMERICANA	0,00%
BANCOLOMBIA	INVERARGOS	0,00%
EMP TELF BOGOTÁ	BANCOLOMBIA	0,00%
EMP TELF BOGOTÁ	EMP TELF BOGOTÁ	0,01%
EMP TELF BOGOTÁ	ISA	0,00%
EMP TELF BOGOTÁ	SURAMERICANA	0,00%
EMP TELF BOGOTÁ	INVERARGOS	0,00%
ISA	BANCOLOMBIA	0,00%
ISA	EMP TELF BOGOTÁ	0,00%
ISA	ISA	0,00%
ISA	SURAMERICANA	0,00%
ISA	INVERARGOS	0,00%
SURAMERICANA	BANCOLOMBIA	0,00%

SURAMERICANA	EMP TELF BOGOTÁ	0,00%
SURAMERICANA	ISA	0,00%
SURAMERICANA	SURAMERICANA	0,00%
SURAMERICANA	INVERARGOS	0,00%
INVERARGOS	BANCOLOMBIA	0,00%
INVERARGOS	EMP TELF BOGOTÁ	0,00%
INVERARGOS	ISA	0,00%
INVERARGOS	SURAMERICANA	0,00%
INVERARGOS	INVERARGOS	0,00%
Var (Rp)		0,03%
Vol (Rp)		1,60%
E(Rp)		0,04%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

En la última columna descansa el producto de las participaciones combinadas con su respectiva covarianza, la sumatoria global de cada resultado genera la varianza del portafolio así concebido y, por supuesto, a partir de ese indicador el nivel de riesgo de la cartera de activos empresariales que, dada la matriz de participaciones corresponde al 1.6%, así mismo el rendimiento continuo del portafolio E(Rp) se obtiene de la sumatoria producto entre la participación de cada activo financiero W_i por su respectiva rentabilidad E(Ri). En ese instante y con los cálculos antes de optimización, el indicador de rendimiento conjunto para todo el portafolio es de 0.04%.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n E(R_i) * W_i \quad (5)$$

Programación lineal, frontera de eficiencia, Optimización y el problema de Markowitz

Markowitz dejó planteada la aplicación de herramientas cuantitativas de optimización a partir del proceso de programación lineal, la idea concreta estriba en maximizar la función objetivo de rentabilidad de la cartera de activos en su conjunto E(Rp) sujeta a las restricciones de 100% de recursos invertidos; en otras palabras que la sumatoria de las participaciones porcentuales sea equivalente al total de la inversión; adicionalmente dichas participaciones deben ser iguales o superiores a cero, dado que la inversión en cada activo

no puede ser negativa y, finalmente que el riesgo de portafolio sea equivalente a un factor de sensibilización que permita recrear escenarios para los cuales a diferentes niveles de riesgo sea posible establecer la respuesta simultánea del rendimiento continuo.

$$\text{Max } E(R_p) \quad (6)$$

$$\text{Max } \sum_{i=1}^n R_i * W_i \quad (7)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$W_i \geq 0; \sum_{i=1}^n W_i = 100\%; E(R_p) = f[\text{Vol}(R_p)] \text{ ó } \text{Vol}(R_p) = B \quad (8)$$

Donde B representa el nivel de *riesgo tolerable* (límite inferior y superior). De ese modo, es posible determinar los niveles de riesgo bajo los cuales es posible optimizar el rendimiento del portafolio y, en consecuencia establecer la frontera de eficiencia de la cartera de activos, los datos de simulación se exponen en el cuadro 9.

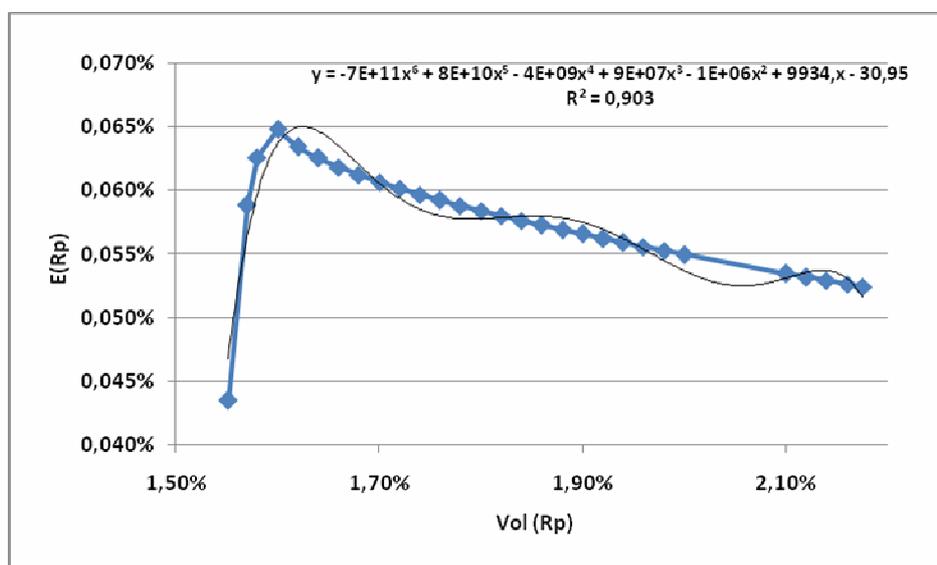
CUADRO 9: SIMULACIÓN DE VOLATILIDADES Y RENDIMIENTOS CONTINUOS

Vol (Rp)	E(Rp)
1,55%	0,04%
1,57%	0,06%
1,58%	0,06%
1,60%	0,06%
1,62%	0,06%
1,68%	0,06%
1,70%	0,06%
1,72%	0,06%
1,80%	0,06%
1,86%	0,06%
1,88%	0,06%
1,90%	0,06%
1,92%	0,06%
1,98%	0,06%
2,00%	0,05%
2,18%	0,05%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

Con base en los resultados de la simulación efectuada por SOLVER, la teoría microeconómica y la modelación bursátil sobre el nivel de riesgo y rendimiento de los activos financieros¹⁶, es posible construir la denominada frontera de eficiencia (Gráfica 7) y, sobre ella, determinar la aversión, indiferencia o amor al riesgo.

GRÁFICA 7: FRONTERA DE EFICIENCIA



FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos en simulación de programación lineal de Solver (Excel, Office 2007) con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33.115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

Aquel individuo que sea indiferente al riesgo puede moverse indistintamente por cualquiera de los puntos que combinan volatilidad y rendimiento, mientras que aquellos agentes económicos con mayor aversión preferirán un nivel de riesgo de 1,55185% que así mismo replicaría un nivel de rentabilidad continua de 0.04%, en paralelo, un amante al riesgo perfectamente puede desenvolverse en el extremo de volatilidades de 2,17529% con rendimientos del orden de los 0,052441%. Cualquiera de estas situaciones, supone una

¹⁶ Una buena referencia sobre este tema se encuentra en **VARIAN**, Hal R. Microeconomía intermedia. Un enfoque actual. Quinta Edición. Antoni Bosh, Alfaomega editores. 1999. Págs.237-250.

conducta que dentro de los límites de solución de volatilidad y rendimiento es racional; no obstante, cuando se trata de maximizar, el inversionista debe valorar su “capacidad de tolerancia a la volatilidad”; es decir, no se trata solamente de conocer en qué punto de la frontera de eficiencia el inversor se va a situar, sino también de cuánto debe invertir en cada uno de los activos financieros.

En consecuencia, a pesar de que todos los puntos que conforman la frontera de eficiencia son puntos donde coexisten tantos niveles de riesgo como rendimiento admisibles, la decisión más inteligente de un inversionista que soporte los límites de aversión o amor al riesgo es determinar el punto en el cual, con la menor volatilidad posible, alcance el mayor rendimiento de la cartera de activos. Nótese que cuando Hal Varian explica la relación entre el rendimiento de los activos inciertos (en microeconomía) o de renta variable (en macroeconomía), y nivel de riesgo; establece que desviaciones típicas ascendentes van de la mano con mayores rendimientos netos, lo que sugiere devolverse a la idea simple de que la volatilidad supone trayectorias directas con los rendimientos continuos¹⁷. Si se aprecia el gráfico 7 dicha relación es cierta hasta un determinado punto, a partir del cual, los mayores riesgos no proporcionan recompensas en la rentabilidad, por consiguiente, a pesar de que la frontera de eficiencia supone un conjunto de respuestas satisfactorias a cualquier nivel de exposición al riesgo, el inversor debe ubicarse en el punto que le represente mayores posibilidades.

A continuación se exponen los escenarios del inversionista adverso al riesgo que generalmente sacrifica rentabilidad por seguridad y, que por consiguiente accede a mayor grado de diversificación; el amante al riesgo que, comúnmente suele priorizar la volatilidad por la satisfacción que esto le produce, sin detenerse demasiado en pensar en la menor diversificación y rentabilidad y; el inversionista que se ajusta a la condición óptima que no necesariamente le arrojará diversificación y seguridad pero que, al menos basaría sus decisiones en el menor de los riesgos que le genera la mayor de los rendimientos continuos.

¹⁷ Ibidem. Págs. 239-241.

Este modelamiento se efectuó en la plataforma de SOLVER¹⁸ y los resultados del proceso se presentan a continuación:

En el cuadro 10 se elaboró el proceso de optimización suponiendo que el inversionista desarrolla aversión al riesgo, lo anterior implicó que el modelo trabajara con una volatilidad del 1,55185% y que alcanzara una rentabilidad continua promedio de 0,04348%; para lo que se tendría que invertir 53% en Isa, 19% en la empresa telefónica de Bogotá, 18% en Inversiones Argos y 9% en Bancolombia.

CUADRO 10: OPTIMIZACIÓN PARA INVERSIONISTAS CON AVERSIÓN AL RIESGO

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
	PORCENTAJE		
\$C\$12	BANCOLOMBIA	10%	9%
	PORCENTAJE EMP TELF		
\$D\$12	BOGOTÁ	35%	19%
	PORCENTAJE ISA		
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	35%	53%
	PORCENTAJE		
\$F\$12	SURAMERICANA	10%	0%
	PORCENTAJE INVERARGOS		
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	10%	18%

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$H\$12	PORCENTAJE TOTAL	100%	\$H\$12=\$I\$12	Opcional	0
\$C\$45	Vol (Rp) BANCOLOMBIA	1,55%	\$C\$45=\$D\$45	Opcional	0
	PORCENTAJE				
\$C\$12	BANCOLOMBIA	9%	\$C\$12>=0	Opcional	9%
	PORCENTAJE EMP TELF				
\$D\$12	BOGOTÁ	19%	\$D\$12>=0	Opcional	19%
	PORCENTAJE ISA				
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	53%	\$E\$12>=0	Opcional	53%
	PORCENTAJE				
\$F\$12	SURAMERICANA	0%	\$F\$12>=0	Obligatorio	0%
	PORCENTAJE INVERARGOS				
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	18%	\$G\$12>=0	Opcional	18%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos en SOLVER con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

¹⁸ SOLVER es la herramienta de programación lineal de Excel.

CUADRO 11: OPTIMIZACIÓN PARA INVERSORES CON PERFIL DE AMANTES AL RIESGO

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
	PORCENTAJE		
\$C\$12	BANCOLOMBIA	10%	0%
	PORCENTAJE EMP TELF		
\$D\$12	BOGOTÁ	35%	100%
	PORCENTAJE ISA		
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	35%	0%
	PORCENTAJE		
\$F\$12	SURAMERICANA	10%	0%
	PORCENTAJE INVERARGOS		
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	10%	0%

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$H\$12	PORCENTAJE TOTAL	100%	\$H\$12=\$I\$12	Opcional	0
\$C\$45	Vol (Rp) BANCOLOMBIA	2,18%	\$C\$45=\$D\$45	Opcional	0
	PORCENTAJE				
\$C\$12	BANCOLOMBIA	0%	\$C\$12>=0	Obligatorio	0%
	PORCENTAJE EMP TELF				
\$D\$12	BOGOTÁ	100%	\$D\$12>=0	Opcional	100%
	PORCENTAJE ISA				
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	0%	\$E\$12>=0	Obligatorio	0%
	PORCENTAJE				
\$F\$12	SURAMERICANA	0%	\$F\$12>=0	Obligatorio	0%
	PORCENTAJE INVERARGOS				
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	0%	\$G\$12>=0	Obligatorio	0%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos en SOLVER con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

En el cuadro 11 se representa el comportamiento que asumiría el inversor amante al riesgo, en este caso, se incurriría en un riesgo de 2.17529% para determinar una rentabilidad del 0.052441%, en efecto, lo anterior implicaría pérdida de diversificación dado que, sólo se invertiría en la empresa telefónica de Bogotá.

CUADRO 12: OPTIMIZACIÓN PARA INVERSIONISTA CON PERFIL INTERMEDIO

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$C\$12	PORCENTAJE BANCOLOMBIA	10%	0%
\$D\$12	PORCENTAJE EMP TELF BOGOTÁ	35%	34%
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	35%	66%
\$F\$12	PORCENTAJE SURAMERICANA	10%	0%
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	10%	0%

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Divergencia
\$H\$12	PORCENTAJE TOTAL	100%	$\$H\$12=\$I\12	Opcional	0
\$C\$45	Vol (Rp) BANCOLOMBIA	1,60%	$\$C\$45=\$D\45	Opcional	0
\$C\$12	PORCENTAJE BANCOLOMBIA	0%	$\$C\$12 \geq 0$	Obligatorio	0%
\$D\$12	PORCENTAJE EMP TELF BOGOTÁ	34%	$\$D\$12 \geq 0$	Opcional	34%
\$E\$12	PORCENTAJE ISA	66%	$\$E\$12 \geq 0$	Opcional	66%
\$F\$12	PORCENTAJE SURAMERICANA	0%	$\$F\$12 \geq 0$	Obligatorio	0%
\$G\$12	PORCENTAJE INVERARGOS	0%	$\$G\$12 \geq 0$	Obligatorio	0%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos en SOLVER con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

Por último, el inversionista intermedio, aquel que una vez determinada la frontera de eficiencia ha identificado el mínimo nivel de riesgo 1.6% que le produce la máxima rentabilidad 0.064817%, en este caso concreto, debe invertir el 66% en Isa y el 34% restante en la empresa de teléfonos de Bogotá.

El cuadro 13 permite al lector comparar los resultados en términos de indicadores de volatilidad, rendimientos continuos, y sobre todo los cambios acaecidos en la matriz de riqueza o el problema de Markowitz, evento que consiste en que a medida que se suscitan cambios en la volatilidad y rentabilidad del portafolio como un todo, se experimentan variaciones internas en la participación individual de las firmas que lo componen.

CUADRO 13: ESCENARIOS DE SIMULACIÓN

ESCENARIO	INDICADORES		VARIACIONES EN LA MATRIZ DE RIQUEZA: EL PROBLEMA DE MARKOWITZ				
	Vol(Rp)	E(Rp)	BANCOLOMBIA	EMP TELF BOGOTÁ	ISA	SURAMERICANA	INVERARGOS
CONSERVADOR	1,55%	0,04%	9%	19%	53%	0%	18%
AMANTE AL RIESGO	2,18%	0,05%	0%	100%	0%	0%	0%
INTERMEDIO	1,60%	0,06%	0%	34%	66%	0%	0%

FUENTE: Construida por cálculos de J. Riascos con información disponible en el web-site del Grupo Aval: http://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,115460184&_dad=portal&_schema=PORTAL consultado en Abril 30 de 2009.

BIBLIOGRAFÍA

BASAGOITI, Rosa. Redefinición de patrones de análisis técnico para operaciones intradía. En: **FERRER-TROYANO**, Francisco J; **TRONCOSO**, Alicia y **RIQUELME**, José C. (Editores) Quinto Taller de Minería de Datos y Aprendizaje (TAMIDA '07). Editorial Thomson. España, 2007. Pág. 232. Disponible en: <http://www.lsi.us.es/redmidas/CEDI07/%5B24%5D.pdf>. Consultado en mayo 4 de 2009.

BUENAVENTURA VERA, Guillermo y **CUEVAS ULLOA**, Andrés Felipe. (2005) Una Propuesta Metodológica para la Optimización de Portafolios de Inversión y su Aplicación al Caso Colombiano. Universidad ICESI. ESTUDIOS GERENCIALES No. 95 • Abril - Junio. Cali

CONTI G, Dante, **RODRÍGUEZ**, Ángel y **BENCOMO FERNÁNDEZ**, María Eugenia. (2003). Determination of the Optimal Portfolio by using Non Linear-Programming. Universidad de los Andes, Bogotá

CRUZ T, Eduardo Arturo; **RESTREPO C**, Jorge Hernan y **MEDINA V**, Pedro Daniel. Portfolio (2008) Equity Investments a Stochastic Approach. Scientia et Technica Año XIV, No 39, Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701.

FRANCO CUARTAS, Fernando de Jesús. (2000) El Modelo de Markowitz en el Contexto Colombiano. FINANCIAL CARD/MatFin/Portaf.pdf. Medellín.

FRANCO CUARTAS, Fernando de Jesús. (2000) El Modelo de Markowitz, los TES, TRM y el IGBC. Modelación y optimización. FINANCIAL CARD/MatFin/Portaf.pdf. Medellín.

FRANCO CUARTAS, Fernando de Jesús. (2000) Portafolio Internacional. Modelación y Optimización. FINANCIAL CARD/MatFin/Portaf.pdf. Medellín

GONZÁLEZ GALEANO, Andrei Alain y **MORENO**, Vladimir. (2007) Modelo de media-varianza de Markowitz para portafolio de activos con retornos mezcla de Gaussianos finitos. Bogotá

MARTÍNEZ BENCARDINO, Ciro. (2005) Estadística y Muestreo. Décimo-segunda edición. Ecoe Ediciones. Bogotá.

MARTINEZ TORRES, Claudia Lorena; **RESTREPO MUNERA**, Jorge Andrés y **VELÁSQUEZ HENAO**, Juan David. (2004) Selección de Portafolios usando simulación y Optimización bajo Incertidumbre. Dyna, Año 71, Nro. 141. Medellín.

NICHOLSON, Walter. (1997) Teoría Microeconómica: Principios y Aplicaciones. Sexta Edición. Mc Graw Hill. Madrid.

OVIEDO, Jorge Mauricio y **MACEDO**, Demian Nicolás. (2006) Insolvencia Bancaria y Riesgo Sistémico: Una aproximación por medio de la Teoría de los Juegos. Universidad Nacional de Córdoba.

RIASCOS, Julio César. (2005) Análisis Técnico de las Empresas de Renta Variable mediante Modelización Estadística de Series de Tiempo y Construcción del Portafolio Óptimo de Inversión. *Módulo de Trabajo de la asignatura de economía aplicada*: Materiales de Trabajo. Bogotá.

SARMIENTO, Julio y **CAYÓN**, Edgardo. (2005) Una introducción práctica a la teoría de portafolios y el capital Asset Pricing Model. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá.

VARIAN, Hal R. Microeconomía intermedia. (1999) Un enfoque actual. Quinta Edición. Antoni Bosh, Alfaomega Editores. Barcelona.

VILLAMIL, Jaime. (2007) “Diversificación y valor en riesgo de un portafolio de acciones”, Cuadernos de Economía, v. XXVI, n. 47, Bogotá